2 Matemáticas financieras

Atrévete

1. ¿Cuál es el segmento que más pesa en el cálculo del IPC?

   Solución: Observando el diagrama de sectores con las ponderaciones de los doce grupos que componen el IPC del año 2024, el segmento que más pesa es el de «Alimentos y bebidas no alcohólicas», con un 19,16 % del total.

2. ¿Y el menos importante de los considerados?

   Solución: El segmento con menor peso en el cálculo del IPC es el de «Enseñanza», que representa un 1,88 %.

3. ¿Serías capaz de calcular el IPC del año 2024 a partir de este gráfico?

   Solución: No, no es posible calcular el IPC del año 2024 únicamente con el diagrama de sectores. El gráfico solo proporciona las ponderaciones (el peso) de cada grupo en la cesta de la compra. Para calcular la variación del IPC, es necesario conocer también la variación de los precios de cada uno de esos grupos durante el periodo de estudio.

1. Porcentajes. Tasa de variación

1. Una consola de videojuegos cuesta 425 €, pero los días previos al Black Friday una página de Internet lanza una oferta con una rebaja del 15 %. ¿Cuál es el precio rebajado? Se espera que el mismo *Black Friday* rebajen el precio de la consola un 17 % más. ¿Cuál sería su precio? ¿Se puede afirmar que el precio rebajado es el 32 % del original?

   Solución: El precio inicial de la consola es de 425 €. Primera rebaja del 15 Precio rebajado (1) = $425 \times (1 - 0{,}15) = 425 \times 0{,}85 = 361{,}25$ €.

   Segunda rebaja del 17 Precio rebajado (2) = $361{,}25 \times (1 - 0{,}17) = 361{,}25 \times 0{,}83 = 299{,}8375$ €.

   Para saber si el precio rebajado es el 32 Descuento total = $1 - (0{,}85 \times 0{,}83) = 1 - 0{,}7055 = 0{,}2945$. Esto significa un descuento del 29,45 Por lo tanto, no se puede afirmar que el precio rebajado es el 32

2. El año pasado, un almacén ofertaba un trabajo de verano a 12 €/h. Este año ha publicado el mismo empleo, pero ofrece 14 €/h. ¿Cuál es la tasa de variación?

   Solución: La tasa de variación (TV) se calcula como:

   $$= \frac{x_t - x_n}{x_n} \times 100$$

   Donde TVx_t es el valor actual (14 €/h) y x_n es el valor anterior (12 €/h).

   $$= \frac{14 - 12}{12} \times 100 = \frac{2}{12} \times 100 = \frac{1}{6} \times 100 \approx 16{,}67\%$$

   La tasa de variación es del 16,67

3. Un bolso tiene un precio de 28,90 € en temporada. Si en las primeras rebajas su precio es de 24,61 € y, en las segundas, 22,15 €, calcula el porcentaje de descuento en cada una de las rebajas. ¿Cuál es el porcentaje total de descuento?

Solución: Precio inicial: 28,90 € Precio en primeras rebajas: 24,61 € Precio en segundas rebajas: 22,15 €

Porcentaje de descuento en las primeras rebajas:

$$\text{Descuento}_1 = \frac{28,90 - 24,61}{28,90} \times 100 = \frac{4,29}{28,90} \times 100 \approx 14,84\%$$

Porcentaje de descuento en las segundas rebajas (sobre el precio de las primeras rebajas):

$$\text{Descuento}_2 = \frac{24,61 - 22,15}{24,61} \times 100 = \frac{2,46}{24,61} \times 100 \approx 10,00\%$$

Porcentaje total de descuento (respecto al precio inicial):

$$\text{Descuento} = \frac{28,90 - 22,15}{28,90} \times 100 = \frac{6,75}{28,90} \times 100 \approx 23,36\% \text{ total}$$

Alternativamente, usando porcentajes encadenados: El precio final es $TV\,22,15 / 28,90 \approx 0,76678$. El descuento total es $1 - 0,76678 = 0,23322$, es decir, 23,32

4. Un producto subió un 8,5 % en marzo y un 6,3 % más en julio. ¿Cuál ha sido la subida total?

Solución: Para calcular la subida total, se utilizan los porcentajes encadenados. Un aumento del 8,5 Un aumento del 6,3 La subida total es el producto de estos factores menos 1:

$$= (1,085 \times 1,063) - 1 = 1,153355 - 1 = 0,153355$$

Esto representa una subida total del 15,3355%

5. Por impartir una conferencia, Antonio ha recibido una transferencia de 157,25 €. Si tiene una retención por IRPF del 15 %, ¿cuál es el importe bruto percibido?

Solución: Si Antonio ha recibido 157,25 € después de una retención del 15 Sea $Subidatotalx$ el importe bruto percibido.

$$0,85 \times x = 157,25$$

$$x = \frac{157,25}{0,85} = 185$$

El importe bruto percibido por Antonio fue de 185 €.

2. Tasas e índices

6. Supongamos una cesta de la compra con tres productos (tabla de la derecha). Si se supone 2020 como año base, calcula los números índice simples del año 2021 e interprétalos.

Productos	2020	2021
Merluza	13 €/kg	16 €/kg
Pan	0,85 €	0,92 €
Teléfono móvil	195 €	180 €

Solución: El número índice simple se calcula como el cociente entre el valor del año actual y el valor del año base, multiplicado por 100.

Año base: 2020. Año actual: 2021.

– **Merluza:**

Índice simple = $\left(\frac{16}{13}\right)\cdot 100 \approx 123{,}08$

Interpretación: El precio de la merluza en 2021 es un 23,08 % superior al de 2020.

– **Pan:**

Índice simple = $\left(\frac{0{,}92}{0{,}85}\right)\cdot 100 \approx 108{,}24$

Interpretación: El precio del pan en 2021 es un 8,24 % superior al de 2020.

– **Teléfono móvil:**

Índice simple = $\left(\frac{180}{195}\right)\cdot 100 \approx 92{,}31$

Interpretación: El precio del teléfono móvil en 2021 es un 7,69 % inferior al de 2020 (100 - 92,31).

7. En la tabla de la derecha figuran los datos facilitados por el INE de la encuesta de población activa del tercer trimestre de los años 2020 y 2021.

	2020	2021
Ocupados	19176900	20031000
Parados	3722900	3416700

a. Calcula la tasa de paro en ese trimestre en los dos años.

b. Halla la variación de ocupados, de parados y de la tasa de paro.

Solución:

a. La tasa de paro (TD) se calcula como el cociente entre el número de parados y la población activa (ocupados + parados), multiplicado por 100.

– **Año 2020:**

Población activa 2020 = $19176900 + 3722900 = 22899800$

TD 2020 = $\left(\frac{3722900}{22899800}\right)\cdot 100 \approx 16{,}26\%$

– **Año 2021:**

Población activa 2021 = $20\,031\,000 + 3\,416\,700 = 23\,447\,700$

TD 2021 = $\left(\dfrac{3\,416\,700}{23\,447\,700}\right) \cdot 100 \approx 14{,}57\%$

b. La variación se calcula como la tasa de variación entre los dos años.

3. Progresiones geométricas

8. Encuentra los cinco primeros términos de las sucesiones definidas de forma recursiva por:

a. $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 1$

b. $a_1 = 1, a_n = n \cdot a_{n-1}$

Solución:

a. Partimos de $a_1 = 3$ y aplicamos la fórmula recursiva $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

$a_1 = 3$

$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

$a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$

Los cinco primeros términos son: 3, 7, 15, 31, 63.

b. Partimos de $a_1 = 1$ y aplicamos la fórmula recursiva $a_n = n \cdot a_{n-1}$.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

Los cinco primeros términos son: 1, 2, 6, 24, 120. (Esta sucesión corresponde al factorial de n, $a_n = n!$)

9. Dada la progresión geométrica 1, 3, 9, 27..., calcula el término vigésimo y la suma de los veinte primeros términos.

Solución: Es una progresión geométrica con primer término $a_1 = 1$ y razón $r = \dfrac{3}{1} = 3$.

El término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

El término vigésimo ($n=20$) es:

$a_{20}=1\cdot 3^{20-1}=3^{19}=1162261467$

La suma de los n primeros términos es $S_n=a_1\dfrac{r^n-1}{r-1}$.

La suma de los veinte primeros términos ($n=20$) es:

$$S_{20}=1\cdot\frac{3^{20}-1}{3-1}=\frac{3^{20}-1}{2}=1743392200$$

10. En una progresión geométrica el tercer término es 2/3 y la razón, 1/3. Calcula los términos noveno y décimo. ¿Cuál es la suma de los diez primeros términos?

Solución: Tenemos $a_3=2/3$ y $r=1/3$.

Primero, calculamos el primer término a_1. Sabemos que $a_3=a_1\cdot r^{3-1}=a_1\cdot r^2$.

$$\frac{2}{3}=a_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=a_1\cdot\frac{1}{9}\Rightarrow a_1=\frac{2}{3}\cdot 9=6$$

Ahora calculamos los términos noveno y décimo:

$$a_9=a_1\cdot r^{9-1}=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8=6\cdot\frac{1}{6561}=\frac{2}{2187}$$

$$a_{10}=a_9\cdot r=\frac{2}{2187}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{6561}$$

Calculamos la suma de los diez primeros términos:

$$S_{10}=a_1\frac{1-r^{10}}{1-r}=6\cdot\frac{1-(1/3)^{10}}{1-1/3}=8{,}9998$$

11. Se estima que un camión se deprecia a razón de un 10 % por año. Si el precio de compra fue de 145 000 €, ¿cuál será a los ocho años? ¿A partir de qué año será inferior a 50 000 €?

Solución: La depreciación anual del 10 % significa que cada año el valor del camión es el 90 % del valor del año anterior. Esto es una progresión geométrica con razón $r=0{,}90$. El valor inicial es $a_1=145000$ € (valor al final del año 0, o C_0).

El valor después de n años será $C_n=C_0\cdot r^n$.

Valor a los ocho años ($n=8$):

$$C_8=145000\cdot(0{,}90)^8\approx 69353 \text{ €}$$

Para saber a partir de qué año el valor será inferior a 50 000 €, planteamos la inecuación:

$$145000\cdot(0{,}90)^n<50000$$

$$(0{,}90)^n<\frac{50000}{145000}=\frac{10}{29}$$

Aplicamos logaritmos para despejar n:

$$n\cdot\log(0{,}90)<\log(10/29)$$

Como $\log(0{,}90)$ es negativo, al dividir cambiamos el signo de la desigualdad:

$$n > \frac{\log(10/29)}{\log(0{,}90)} \approx 10{,}10$$

El valor será inferior a 50 000 € a partir del año 11.

4. Tipos de interés

12. En una cuenta de ahorro se ingresan 3000 €, a un tipo de interés anual del 4 %, durante seis meses. Si los intereses se pagan al finalizar el plazo, ¿cuál es el importe de estos?

Solución: Se trata de un cálculo de interés simple. La fórmula es $I = C \cdot i \cdot t$.

- Capital (C): 3000 €
- Tipo de interés anual (i): 4 % = 0,04
- Tiempo (t): 6 meses = 0,5 años

$I = 3000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}5 = 60$ €

El importe de los intereses es de 60 €.

13. A un tipo de interés fijo del 5 %, se solicita un préstamo de 1000 € a devolver en un año. Comprueba que los intereses coinciden tanto si el tipo es simple como si es compuesto.

Solución:

- Capital inicial (C_0): 1000 €
- Tipo de interés anual (i): 5 % = 0,05
- Tiempo (t): 1 año

Interés simple: $I = C_0 \cdot i \cdot t = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 1 = 50$ €

Interés compuesto: El capital final es $C_F = C_0\left(1+i\right)^t = 1000 \cdot \left(1+0{,}05\right)^1 = 1050$ €

Los intereses son la diferencia entre el capital final y el inicial: $I = C_F - C_0 = 1050 - 1000 = 50$ €

Como se puede observar, para un periodo de capitalización de un año, los intereses generados son los mismos en ambos sistemas.

5. Valor presente y valor futuro

14. ¿Cuánto dinero hay que invertir a día de hoy para obtener un capital futuro de 11 755 € dentro de cinco años, al 8 % anual de interés compuesto?

Solución: Nos piden calcular el valor presente (VP) o capital inicial (C_0) de un capital futuro (C_F) de 11 755 €.

La fórmula es $C_0 = \dfrac{C_F}{\left(1+i\right)^t} = C_F\left(1+i\right)^{-t}$.

– Capital futuro (C_F): 11 755 €

– Tipo de interés anual (i): 8 % = 0,08

– Tiempo (t): 5 años

$$C_0 = \frac{11755}{(1+0,08)^5} \approx 8000,26$$

Hay que invertir aproximadamente 8000 € a día de hoy.

15. Si se dispone hoy de 30 000 € y se considera un interés simple del 5 %, ¿tendrá el mismo valor que 30 000 € dentro de un año?

Solución: No, no tendrá el mismo valor. El valor del dinero cambia con el tiempo debido a la inflación y al coste de oportunidad (el interés que se podría ganar).

El valor futuro (VF) de 30 000 € de hoy, dentro de un año a un interés simple del 5 %, será:

$$VF = VP(1+it) = 30000 \cdot (1+0,05 \cdot 1) = 30000 \cdot 1,05 = 31500 \text{ €}$$

Por tanto, 30 000 € hoy equivalen a 31 500 € dentro de un año en estas condiciones. Dicho de otra forma, 30 000 € dentro de un año valen menos que 30 000 € hoy.

16. Una joven invierte 20 000 € en una cuenta que le ofrece un interés simple anual del 5 %. ¿Cuál será el saldo que tendrá dentro de nueve meses?

Solución: Nos piden calcular el capital final (C_F) en una operación de capitalización simple.

La fórmula es $C_F = C_0(1+it)$.

– Capital inicial (C_0): 20 000 €

– Tipo de interés anual (i): 5 % = 0,05

– Tiempo (t): 9 meses = $\frac{9}{12} = 0,75$ años

$$C_F = 20000 \cdot (1+0,05 \cdot 0,75) = 20000 \cdot (1+0,0375) = 20000 \cdot 1,0375 = 20750 \text{ €}$$

El saldo dentro de nueve meses será de 20 750 €.

17. Se invierten 10 000 € al 5 % anual de capitalización compuesta durante dos años y medio. Calcula la rentabilidad.

Solución: La rentabilidad son los intereses generados. Primero calculamos el capital final (C_F).

$$C_F = C_0(1+i)^t$$

– Capital inicial (C_0): 10 000 €

– Tipo de interés anual (i): 5 % = 0,05

– Tiempo (t): 2,5 años

$C_F = 10\,000 \cdot (1+0{,}05)^{2,5} \approx 11297{,}26\,€$

La rentabilidad (intereses) es la diferencia entre el capital final y el inicial:

$I = C_F - C_0 = 11297{,}26 - 10\,000 = 1297{,}26\ €$

La rentabilidad es de $1297{,}26$ €.

18. Determina el capital final en capitalización simple y compuesta de 50 000 € colocados a un tipo de interés del 3 % anual si el periodo de capitalización es:

a. Seis meses.

b. Un año.

c. Tres años.

Solución:

– Capital inicial (C_0): 50 000 €

– Tipo de interés anual (i): 3 % = 0,03

a. **Seis meses** ($t = 0{,}5$ años)

– Simple: $C_F = 50\,000 \cdot (1+0{,}03 \cdot 0{,}5) = 50\,000 \cdot 1{,}015 = 50\,750\ €$

– Compuesta: $C_F = 50\,000 \cdot (1+0{,}03)^{0,5} \approx 50\,000 \cdot 1{,}014889 \approx 50\,744{,}45\ €$

b. **Un año** ($t = 1$ año)

– Simple: $C_F = 50\,000 \cdot (1+0{,}03 \cdot 1) = 50\,000 \cdot 1{,}03 = 51500\ €$

– Compuesta: $C_F = 50\,000 \cdot (1+0{,}03)^1 = 51500\ €$

c. **Tres años** ($t = 3$ años)

– Simple: $C_F = 50\,000 \cdot (1+0{,}03 \cdot 3) = 50\,000 \cdot 1{,}09 = 54\,500\ €$

– Compuesta: $C_F = 50\,000 \cdot (1+0{,}03)^3 = 50\,000 \cdot 1{,}092727 = 54\,636{,}35\ €$

19. Calcula el valor actual o presente de un capital de 15 600 €, impuesto durante tres años, al 5 % de interés simple anual.

Solución: Nos piden el valor presente (VP) o capital inicial (C_0) de un capital futuro (C_F) de 15 600 € en capitalización simple.

La fórmula es $C_F = C_0(1+it)$, por lo que $C_0 = \dfrac{C_F}{1+it}$.

– Capital futuro (C_F): 15 600 €

– Tipo de interés anual (i): 5 % = 0,05

– Tiempo (t): 3 años

$$C_0 = \frac{15\,600}{1+0,05\cdot 3} = \frac{15\,600}{1+0,15} = \frac{15\,600}{1,15} \approx 13\,565,22\ €$$

El valor actual es de 13 565,22 €.

6. Tasa anual equivalente (TAE)

20. Calcula la TAE de una inversión de 1000 € durante un año al 5

Solución: El tipo de interés nominal anual es $i = 0,05$. La capitalización es trimestral, por lo que el número de periodos de capitalización al año es $n = 4$. La fórmula para la TAE (que en este caso coincide con el TIE al no haber comisiones) es:

$$= \left(1+\frac{i}{n}\right)^n - 1$$

$$\text{TAE} = \left(1+\frac{0,05}{4}\right)^4 - 1$$

$$\text{TAE} = (1+0,0125)^4 - 1$$

$$\text{TAE} = (1,0125)^4 - 1 \approx 1,050945 - 1 = 0,050945$$

La TAE es aproximadamente del 5,0945

21. ¿Cuál es el TIN de una cuenta de ahorro si la TAE es del 3

Solución: La TAE es del 3 Los intereses se pagan semestralmente, por lo que el número de periodos de capitalización al año es $n = 2$. Utilizamos la fórmula de la TAE y despejamos el TIN (i):

$$= \left(1+\frac{i}{n}\right)^n - 1$$

$$0,03 = \left(1+\frac{i}{2}\right)^2 - 1$$

$$1+0,03 = \left(1+\frac{i}{2}\right)^2$$

$$1,03 = \left(1+\frac{i}{2}\right)^2$$

Tomamos la raíz cuadrada en ambos lados:

$$\sqrt{1,03} = 1+\frac{i}{2}$$

$$1,014889 \approx 1+\frac{i}{2}$$

$$0,014889 \approx \frac{i}{2}$$

$$i \approx 0,014889 \times 2 = 0,029778$$

El TIN anual es aproximadamente del 2,9778

22. Calcula la TAE de un depósito bancario sabiendo que el tipo de interés nominal es del 8 % y la capitalización es mensual.

Solución:

$i = 0,08, n = 12$

Luego,

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} - 1 = 0,0830 \text{ ó } 8,30\%$$

La TAE es del 8,30%

23. Si la TAE de un producto financiero es del 9 %, calcula el TIN anual, semestral y mensual equivalentes.

Solución: Para calcular el TIN (Tipo de Interés Nominal) a partir de la TAE (Tasa Anual Equivalente), utilizamos la fórmula: $TIN = n \cdot \left(\sqrt[n]{1 + TAE} - 1\right)$ donde n es el número de periodos de capitalización en un año.

- **TIN anual equivalente (n = 1):** Cuando la capitalización es anual, el TIN coincide con la TAE. $TIN = 1 \cdot \left(\sqrt[1]{1 + 0,09} - 1\right) = 0,09 \to 9\%$
- **TIN semestral equivalente (n = 2):**

  $TIN = 2 \cdot \left(\sqrt[2]{1 + 0,09} - 1\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{1,09} - 1\right) \approx 2 \cdot (1,04403 - 1) = 0,08806 \to 8,81\%$
- **TIN mensual equivalente (n = 12):**

  $TIN = 12 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + 0,09} - 1\right) \approx 12 \cdot (1,007207 - 1) = 0,08648 \to 8,65\%$

24. En un préstamo con un tipo de interés nominal del 5 %, a pagar en cuotas mensuales, ¿cuál es el tipo de interés efectivo?

Solución: El tipo de interés efectivo (TIE) se calcula a partir del tipo de interés nominal (TIN) y la frecuencia de los pagos. La fórmula es: $TIE = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$ Donde i es el TIN (0,05) y n es el número de pagos al año (12, por ser cuotas mensuales).

$TIE = \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12} - 1 \approx (1,004167)^{12} - 1 \approx 1,05116 - 1 = 0,05116$ El tipo de interés efectivo es del 5,12 %.

25. Se invierten 30 000 euros en un depósito bancario a un TIN del 2,5 %. Calcula la TAE y los intereses en estos casos:

a. La duración es de 2 años y los intereses se pagan al vencimiento.

b. La duración es de 2 años, pero los intereses se pagan mensualmente.

c. El periodo de duración es de seis meses y los intereses se pagan al vencimiento.

Solución:

a. **Duración de 2 años, pago al vencimiento.** Como los intereses se pagan una única vez al final del periodo total, la capitalización es simple y no hay periodos intermedios dentro del año. Para el cálculo de la TAE, se considera $n=1$ (un solo pago de intereses al año). En este caso, TAE = TIN. TAE = 2,5 %. Los intereses se calculan con la fórmula de interés simple $I = C \cdot i \cdot t$: $I = 30000 \cdot 0{,}025 \cdot 2 = 1500$ €

b. **Duración de 2 años, pago mensual.** La TAE se calcula con $i = 0{,}025$ y $n = 12$:

$TAE = \left(1+\frac{0{,}025}{12}\right)^{12} - 1 \approx (1{,}002083)^{12} - 1 \approx 1{,}02528 - 1 = 0{,}02528 \to 2{,}53\%$ Los intereses se calculan usando la fórmula del capital final con capitalización compuesta periódica

$C_F = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$: $C_F = 30000 \cdot \left(1+\frac{0{,}025}{12}\right)^{12\cdot 2} = 30000 \cdot \left(1+\frac{0{,}025}{12}\right)^{24} \approx 31538{,}55$ € Intereses = $C_F - C_0 = 31538{,}55 - 30000 = 1538{,}55$ €

c. **Duración de seis meses, pago al vencimiento.** Como el periodo es inferior a un año y el pago es único al final, la TAE coincide con el TIN. TAE = 2,5 %. Los intereses se calculan con la fórmula de interés simple, con $t = 0{,}5$ años: $I = 30000 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}5 = 375$ €

Capital final: 30375 €.

La TAE equivalente (capitalización compuesta annual a partir de un semestre al 2.5% nominal) seria:

$$TAE = \left(1+\frac{0.025}{2}\right)^{2} - 1 = (1.0125)^{2} - 1 = 1.025156 - 1 = 2.5156\%$$

7. Anualidades de capitalización

26. Una madre abre una cuenta de ahorro para su hija que acaba de cumplir 12 años. Decide ingresar 50 € al mes hasta que cumpla 18 años. Si el banco le da un interés compuesto del 1,5 % anual, ¿qué capital tendrá en su 18 cumpleaños?

Solución: Se trata de una anualidad de capitalización. Primero, ajustamos los datos al periodo de la aportación (mensual).

- Anualidad (a): 50 €
- Tipo de interés anual (i_{anual}): 1,5 % → Tipo de interés mensual (i): $\frac{0{,}015}{12} = 0{,}00125$

- Tiempo: Desde los 12 hasta los 18 años hay 6 años. El número de periodos mensuales (t) es $6 \cdot 12 = 72$ meses.

La fórmula para el capital final (C) de una anualidad de capitalización es:

$C = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$ $C = 50 \cdot (1+0{,}00125) \cdot \frac{(1+0{,}00125)^{72} - 1}{0{,}00125}$ $\approx 3769{,}22$ € En su 18 cumpleaños, tendrá un capital de $3769{,}22$ €.

27. Una persona prepara un plan de pensiones a la edad de 30 años. Decide ingresar 2000 € al comienzo de cada año y hasta su jubilación a los 65 años. ¿Con qué capital contará cuando se jubile si el interés anual garantizado es del 2 %?

Solución: Se trata de una anualidad de capitalización con aportaciones anuales.

- Anualidad (a): 2000 €
- Tipo de interés anual (i): 2 % = 0,02
- Tiempo (t): Desde los 30 hasta los 65 años hay 35 años.

La fórmula para el capital final (C) de una anualidad de capitalización es:

$C = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$ $C = 2000 \cdot (1+0{,}02) \cdot \frac{(1+0{,}02)^{35} - 1}{0{,}02}$ $\approx 101988{,}73$ € Cuando se jubile, contará con un capital de 101 988,73 €.

8. Amortización

28. Un autónomo pide un préstamo por 30 000 € al 7,20 % TIN, 9,15 % TAE y con una comisión de apertura del 2,3 %. Si lo devuelve en 3 años, calcula el importe total devengado sumando capital, comisiones e intereses.

Solución: En muchos casos la comisión de apertura está financiada y se incorpora al importe del préstamo. Entonces, el importe total del préstamo es:

$$C = 30.000 + 0,023 \times 30.000 = 30.690 \text{ €}$$

El tipo de interés mensual es $i = 0,0720/12 = 0,006$ y el plazo $t = 3 \times 12 = 36$ meses.

Por tanto, la cuota del préstamo es:

$$a = C \times \frac{i}{1-(1+i)^{-t}} = 30.690 \times \frac{0{,}006}{1-(1{,}006)^{-36}} = 950{,}43 \text{ €}$$

El importe total devengado es: 36 × 950, 43 = 34.215, 48 €

29. Un préstamo de 1200 € se devolverá en cuotas mensuales durante medio año, devengando un interés del 9 %. Calcula la cuota mensual del préstamo y la tabla de amortización.

Solución: El capital prestado es C = 1.200 €, el interés mensual i = 0, 09/12 = 0, 0075 y la duración t = 6 meses

La cuota mensual del préstamo es:

$$a = c \times \frac{i}{1-(1+i)^{-t}} = 1.200 \times \frac{0,0075}{1-(1,0075)^{-6}} = 205,28 \ €$$

La tabla de amortización del préstamo es la siguiente (*):

Mes	Cuota	Amortizado	Intereses	Capital pendiente
0	0,00	0,00	0,00	1.200
1	205,28	196,28	9,00	1.003,72
2	205,28	197,75	7,53	805,97
3	205,28	199,24	6,04	606,73
4	205,28	200,73	4,55	406,00
5	205,28	202,23	3,05	203,77
6	205,30	203,77	1,53	0,00

(*) Resultados de la tabla obtenido con el simulador del Banco de España.

30. ¿Cuál es el plazo de amortización de una hipoteca de 80 000 €, a un TIN de 2,3 %, sin ningún tipo de gastos y comisiones por la que se paga una cuota mensual aproximada de 498 €?

Solución: Los datos son: C = 80.000 , i = 0, 023/12 mensual y a = 498

Tenemos, pues, que calcular el plazo de amortización t. Así:

$$t = \frac{log\left(1-\frac{Ci}{a}\right)}{log(1+i)} = \frac{log\left(1-\frac{8.000 \cdot \frac{0,023}{12}}{498}\right)}{log\left(1+\frac{0,023}{12}\right)} = 192 \text{, es decir, 16 años}$$

31. Julia solicita información sobre un préstamo en dos entidades financieras: la primera le ofrece un TIN del 2 %, sin ningún tipo de comisiones; y la segunda, un TIN del 1,8 % y un 2 % de comisión de apertura. Si el importe es de 3000 € a devolver en cuatro años, ¿qué opción debe elegir?

Solución: En el primer caso el importe del préstamo es de 3.000 € , i = 0, 02/12 y $t = 4 \times 12$ = 48 meses.

La cuota mensual es:

$$a = C\frac{i}{1+(1+i)^{-t}} = 3.000 \cdot \frac{\frac{0,02}{12}}{1-\left(1+\frac{0,02}{12}\right)^{-48}} = 65,09$$

Por tanto, el importe total adeudado en este caso: 48 × 65, 09 = 3.124, 32 €

En la segunda opción el importe del préstamo incluye la comisión de apertura. Es decir:

$$C = 3.000 + 0,02 \times 3.000 = 3.060$$

Además, $i = 0,018/12 = 0,0015$ y $t = 4 \times 12 = 48$ meses

Por tanto, la cuota mensual es:

$$a = 3.060 \times \frac{0,0015}{1-(1,0015)^{-48}} = 66,12 \ €$$

El importe total adeudado es: 48 × 66,12 = 3.173, 76 €

Interesa elegir la primera opción.

32. Una odontóloga ha comprado un piso para montar la consulta. Para ello, ha contratado una hipoteca de 300 000 €, a un TIN del 1,5 %, sin comisiones ni gastos, a un plazo de 30 años. Calcula la cuota mensual que tiene que pagar y los intereses totales de la hipoteca.

Solución: El importe de la hipoteca es $C = 300.000$, el interés mensual $i = 0,015/12 = 0,00125$ y la duración $t = 30 \times 12 = 360$ meses. Por tanto, la cuota mensual es:

$$a = c \times \frac{i}{1-(1+i)^{-t}} = 300.000 \times \frac{0,00125}{1-(1,00125)^{-360}} = 1.035,36 \ €$$

El importe total pagado es:

$$360 \times 1.035,36 = 372.729,60 \ €$$

Luego, los intereses totales de la hipoteca son:

$$73.729,60 \ €$$

Actividades finales

Porcentajes. Tasas e índices

1. El precio del aluminio se ha incrementado en enero un 6% y en febrero un 3% más. ¿Se puede decir que en estos dos meses se ha incrementado en un 9% o en un 9,18 %? Razónalo.

Solución: No, no se puede afirmar que el incremento total sea del 9%. Los porcentajes se encadenan multiplicando los factores de variación.

El factor de variación para un incremento del 6% es $1+\frac{6}{100}=1,06$. El factor de variación para un incremento del 3% es $1+\frac{3}{100}=1,03$.

El factor de variación total es el producto de los factores de variación individuales:

$$1,06\times 1,03=1,0918$$

Esto significa que el precio final es el 109,18% del precio original. Por lo tanto, el incremento total ha sido del $9,18\%$.

2. Calcula la tasa de paro de un país con una población activa de 5 234000 personas y 24553 parados.

Solución: La tasa de paro (TD) se calcula como el cociente entre el número de parados y la población activa, multiplicado por 100.

$$=\frac{\text{Númerodeparados}}{\text{Población activa}}\times 100$$

Sustituyendo los valores dados:

$$\text{TD}=\frac{24553}{5234000}\times 100$$

$$\text{TD}=0,00469144\times 100$$

$$\text{TD}\approx 0,469\%$$

La tasa de paro del país es aproximadamente del $TD0,469\%$.

3. La variación mensual del IPC durante el año 2021 es:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	-0,6	1,0	1,2	0,5	0,5	-0,8	0,5	0,8	1,8	0,3	1,3

¿Cuál ha sido la variación anual del IPC en 2021? En los años 2017, 2018, 2019 y 2020 los IPC fueron 1,10, 1,20, 0,80 y -0,50, respectivamente. Tomando como base 2017, determina los números índices y la tasa de variación.

Solución: **Variación anual del IPC en 2021:** Para calcular la variación anual, se encadenan los factores de variación mensuales. Si el IPC inicial es 100:

- Enero: $100\times(1+0/100)=100$
- Febrero: $100\times(1-0,6/100)=99,4$
- Marzo: $99,4\times(1+1,0/100)=100,394$
- Abril: $100,394\times(1+1,2/100)=101,601728$
- Mayo: $101,601728\times(1+0,5/100)=102,10973664$
- Junio: $102,10973664\times(1+0,5/100)=102,6202853264$
- Julio: $102,6202853264\times(1-0,8/100)=101,794038103168$
- Agosto: $101,794038103168\times(1+0,5/100)=102,3029602936264$
- Septiembre: $102,3029602936264\times(1+0,8/100)=103,1214199371156$
- Octubre: $103,1214199371156\times(1+1,8/100)=104,977590894056$
- Noviembre: $104,977590894056\times(1+0,3/100)=105,2925232717881$
- Diciembre: $105,2925232717881\times(1+1,3/100)=106,6619069780017$

La variación anual del IPC en 2021 es:

$$=\left(\frac{106,6619069780017}{100}-1\right)\times 100\approx 6,66\%$$

Números índices y tasa de variación tomando como base 2017: Asumimos que los valores 1,10, 1,20, 0,80 y -0,50 son las variaciones porcentuales anuales del IPC para cada año, y que el IPC de 2017 es la base (índice 100).

- **Año 2017 (Base):**
  - Índice: $Variación anual 100$
  - Tasa de variación: 0%
- **Año 2018:** El IPC aumentó un $1,20\%$ respecto a 2017.
  - Índice: $100\times(1+1,20/100)=101,20$
  - Tasa de variación: $1,20\%$
- **Año 2019:** El IPC aumentó un $0,80\%$ respecto a 2017.
  - Índice: $100\times(1+0,80/100)=100,80$
  - Tasa de variación: $0,80\%$

- **Año 2020:** El IPC disminuyó un $0,50\%$ respecto a 2017.
  - Índice: $100 \times (1 - 0,50 / 100) = 99,50$
  - Tasa de variación: $-0,50\%$

4. Según el INE, la población (en miles de personas) por sexo, en los tres primeros trimestres del año 2021 viene dada en la siguiente tabla. Calcula los números índices y la variación para cada uno de los sexos, tomando como referencia el primer trimestre de 2021.

	I	II	III
Hombre	22999,7	22966,3	22955,2
Mujer	23877,9	23849,7	23844,0

Solución:

Tabla de hombres

Trimestre	Población (miles)	Nº índice	Variación
I	22.997,7	100	
II	22.966,3	99,86	-0,14%
III	22.955,2	99,82	-0,18%

Tabla de mujeres:

Trimestre	Población (miles)	Nº índice	Variación
I	23.877,9		
II	23.849,7	99,88	-0,12%
III	23.844,0	99,86	-0,14%

5. Una empresa está analizando la evolución de los precios (en euros) de tres componentes A, B y C para automóviles, entre los años 2017 y 2021.

Año	A	B	C
2017	510	710	90
2018	530	720	94
2019	540	730	95
2020	520	740	95
2021	520	740	96

a. Halla el incremento anual de precios de la componente C.

b. Calcula un índice simple para medir la evolución de los precios de la componente C, tomando como periodo de referencia el año 2017.

c. Calcula un índice compuesto de la evolución de los precios utilizando la media aritmética de los índices simples y tomando como referencia 2017.

Solución:

a. Para hallar el incremento anual de precios de la componente C, calculamos la diferencia de precios entre años consecutivos:

- Incremento de 2017 a 2018: $94-90=4$ €
- Incremento de 2018 a 2019: $95-94=1$ €
- Incremento de 2019 a 2020: $95-95=0$ €
- Incremento de 2020 a 2021: $96-95=1$ €

b. Para calcular el índice simple de la componente C, tomando como periodo de referencia el año 2017 (precio base $p_0=90$ €):

- Año 2017: $I_{2017}=\frac{90}{90}\times 100=100$
- Año 2018: $I_{2018}=\frac{94}{90}\times 100\approx 104,44$
- Año 2019: $I_{2019}=\frac{95}{90}\times 100\approx 105,56$
- Año 2020: $I_{2020}=\frac{95}{90}\times 100\approx 105,56$
- Año 2021: $I_{2021}=\frac{96}{90}\times 100\approx 106,67$

c. Para calcular un índice compuesto utilizando la media aritmética de los índices simples y tomando como referencia el año 2017, primero calculamos los índices simples para las componentes A y B con base 2017.

Índices simples para la componente A (base 2017, $p_0=510$ €):

- Año 2017: $I_{A,2017}=\frac{510}{510}\times 100=100$
- Año 2018: $I_{A,2018}=\frac{530}{510}\times 100\approx 103,92$
- Año 2019: $I_{A,2019}=\frac{540}{510}\times 100\approx 105,88$
- Año 2020: $I_{A,2020}=\frac{520}{510}\times 100\approx 101,96$
- Año 2021: $I_{A,2021}=\frac{520}{510}\times 100\approx 101,96$

Índices simples para la componente B (base 2017, $p_0=710$ €):

- Año 2017: $I_{B,2017}=\frac{710}{710}\times 100=100$
- Año 2018: $I_{B,2018}=\frac{720}{710}\times 100\approx 101,41$
- Año 2019: $I_{B,2019}=\frac{730}{710}\times 100\approx 102,82$

- Año 2020: $I_{B,2020} = \dfrac{740}{710} \times 100 \approx 104,23$
- Año 2021: $I_{B,2021} = \dfrac{740}{710} \times 100 \approx 104,23$

Índices compuestos (media aritmética de I_A, I_B, I_C):

- Año 2017: $I_{Comp,2017} = \dfrac{100+100+100}{3} = 100$
- Año 2018: $I_{Comp,2018} = \dfrac{103,92+101,41+104,44}{3} \approx 103,26$
- Año 2019: $I_{Comp,2019} = \dfrac{105,88+102,82+105,56}{3} \approx 104,75$
- Año 2020: $I_{Comp,2020} = \dfrac{101,96+104,23+105,56}{3} \approx 103,92$
- Año 2021: $I_{Comp,2021} = \dfrac{101,96+104,23+106,67}{3} \approx 104,29$

Año	**I_A**	**I_B**	**I_C**	**Variación C**	**Media**	**I.compuesto**
2017	100	100	100	-	100	100
2018	103,92	101,41	104,44	4,44%	103,26	103,26
2019	105,88	102,82	105,56	5,56%	104,75	104,75
2020	101,96	104,23	105,56	5,56%	103,92	103,92
2021	101,96	104,23	106,67	6,67%	104,29	104,29

6. Se considera una cesta de la compra con tres productos P1, P2 y P3.

	Precios			**Cantidades**		
(lr)2-4 (lr)5-7	**mes 1**	**mes 2**	**mes 3**	**mes 1**	**mes 2**	**mes 3**
P1	18	20	21	10	12	14
P2	12	11	11	12	12	18
P3	32	35	39	10	10	12

Si se supone el mes 1 como mes base, calcula el IPC según el índice de Laspeyres.

Solución: El Índice de Precios de Consumo (IPC) de Laspeyres se calcula con la fórmula:

$$I_L = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

donde:

- p_t son los precios en el periodo actual (t).
- q_0 son las cantidades en el periodo base (mes 1).
- p_0 son los precios en el periodo base (mes 1).

Paso 1: Calcular el valor de la cesta en el periodo base (mes 1). Los precios en el mes 1 (p_0) son: P1 = 18, P2 = 12, P3 = 32. Las cantidades en el mes 1 (q_0) son: P1 = 10, P2 = 12, P3 = 10.

$$\sum p_0 q_0 = (18\times 10)+(12\times 12)+(32\times 10)$$

$$\sum p_0 q_0 = 180+144+320=644$$

Paso 2: Calcular el valor de la cesta en el mes 2 utilizando las cantidades del periodo base. Los precios en el mes 2 (p_2) son: P1 = 20, P2 = 11, P3 = 35. Las cantidades del periodo base (q_0) son: P1 = 10, P2 = 12, P3 = 10.

$$\sum p_2 q_0 = (20\times 10)+(11\times 12)+(35\times 10)$$

$$\sum p_2 q_0 = 200+132+350=682$$

Ahora calculamos el IPC para el mes 2:

$$IPC_{Mes2}=\frac{682}{644}\times 100\approx 105{,}90$$

Paso 3: Calcular el valor de la cesta en el mes 3 utilizando las cantidades del periodo base. Los precios en el mes 3 (p_3) son: P1 = 21, P2 = 11, P3 = 39. Las cantidades del periodo base (q_0) son: P1 = 10, P2 = 12, P3 = 10.

$$\sum p_3 q_0 = (21\times 10)+(11\times 12)+(39\times 10)$$

$$\sum p_3 q_0 = 210+132+390=732$$

Ahora calculamos el IPC para el mes 3:

$$IPC_{Mes3}=\frac{732}{644}\times 100\approx 113{,}66$$

Por lo tanto, el IPC según el índice de Laspeyres, tomando el mes 1 como base, es:

- Para el mes 2: $105{,}90$
- Para el mes 3: $113{,}66$

Progresiones aritméticas y geométricas

7. En las siguientes sucesiones dadas por su término general, calcula los cuatro primeros términos:

   a. $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$

   b. $b_n=(-1)^n\dfrac{2}{n}$

   c. $c_n=\begin{cases} n, & \text{sinespar} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$

   d. $d_n=\dfrac{(n+1)^2}{3}$

Solución:

a. $a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$; $a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$; $a_3 = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $a_4 = \frac{2 \cdot 4}{4+1} = \frac{8}{5}$.

b. $b_1 = (-1)^1 \frac{2}{1} = -2$; $b_2 = (-1)^2 \frac{2}{2} = 1$; $b_3 = (-1)^3 \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$; $b_4 = (-1)^4 \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

c. $c_1 = 1$; $c_2 = 2$; $c_3 = 1$; $c_4 = 4$.

d. $d_1 = \frac{(1+1)^2}{3} = \frac{4}{3}$; $d_2 = \frac{(2+1)^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$; $d_3 = \frac{(3+1)^2}{3} = \frac{16}{3}$; $d_4 = \frac{(4+1)^2}{3} = \frac{25}{3}$.

8. El salario actual anual de una joven es de 22 000 €. La empresa le garantiza un incremento anual de 1200 € durante los próximos 10 años. ¿Qué salario tendrá dentro de una década? Halla la suma de los salarios durante esos 10 años.

Solución: Es una progresión aritmética con $a_1 = 22000$ y $d = 1200$. El salario dentro de 10 años (en el año 10) será $a_{10} = a_1 + (10-1)d = 22000 + 9 \cdot 1200 = 22000 + 10800 = 32800$ €. La suma de los salarios durante esos 10 años es $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(22000 + 32800) \cdot 10}{2} = 54800 \cdot 5 = 274000$ €.

9. Halla los cinco primeros términos de la sucesión definida de forma recursiva por: $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} - 2$. Comprueba que se trata de una progresión aritmética y escríbela mediante el término general. ¿Cuál es el término que ocupa la posición número 50?

Solución: $a_1 = 4$; $a_2 = 4 - 2 = 2$; $a_3 = 2 - 2 = 0$; $a_4 = 0 - 2 = -2$; $a_5 = -2 - 2 = -4$. Es una progresión aritmética porque la diferencia entre términos consecutivos es constante: $d = -2$.
El término general es $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)(-2) = 4 - 2n + 2 = 6 - 2n$. El término 50 es $a_{50} = 6 - 2 \cdot 50 = 6 - 100 = -94$.

10. Halla la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética: 4, 10, 16, 22, 28...

Solución: Es una progresión aritmética con $a_1 = 4$ y $d = 6$. Primero calculamos el término 20: $a_{20} = a_1 + (20-1)d = 4 + 19 \cdot 6 = 4 + 114 = 118$. La suma es

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 118) \cdot 20}{2} = 122 \cdot 10 = 1220.$$

11. Encuentra la expresión del término general de una progresión aritmética de la que se sabe que $a_2 = 4$ y $a_6 = 16$.

Solución: Tenemos el sistema: $a_2 = a_1 + d = 4$ $a_6 = a_1 + 5d = 16$ Restando la primera ecuación de la segunda: $(a_1 + 5d) - (a_1 + d) = 16 - 4 \Rightarrow 4d = 12 \Rightarrow d = 3$.
Sustituyendo $d = 3$ en la primera ecuación: $a_1 + 3 = 4 \Rightarrow a_1 = 1$. El término general es $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

12. En una grada de un polideportivo hay 18 butacas en la primera fila, 21 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente hasta un total de 40 filas. ¿Cuántas butacas hay en esa grada?

Solución: Es una progresión aritmética con $a_1 = 18$ y $d = 3$. Hay $n = 40$ filas. Primero calculamos el número de butacas en la fila 40: $a_{40} = a_1 + (40-1)d = 18 + 39 \cdot 3 = 18 + 117 = 135$.

El número total de butacas es la suma $S_{40} = \dfrac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = \dfrac{(18+135) \cdot 40}{2} = 153 \cdot 20 = 3060$ butacas.

13. A una persona le ha tocado un premio de la lotería y, después de pagar los correspondientes impuestos, la cantidad que ha conseguido ha sido de 630 000 €. Esta persona decide dedicar su premio a una casa de acogida de la ONG Aldeas Infantiles cuyos gastos anuales para tres hermanos estima en 30 000 €, que se incrementarán de forma aritmética en 1000 € cada año. ¿Cuántos años podrá pagar los gastos de los tres hermanos en la casa de acogida?

Solución: Los gastos anuales forman una progresión aritmética con $a_1 = 30000$ y $d = 1000$.

La suma de los gastos durante n años es $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}$. Buscamos el valor de n tal que $S_n \le 630000$. $\dfrac{(2 \cdot 30000 + (n-1)1000) \cdot n}{2} \le 630000$ $(60000 + 1000n - 1000) \cdot n \le 1260000$

$(59000 + 1000n) \cdot n \le 1260000$ $1000n^2 + 59000n - 1260000 \le 0$ $n^2 + 59n - 1260 \le 0$

Resolvemos la ecuación $n^2 + 59n - 1260 = 0$:

$n = \dfrac{-59 \pm \sqrt{59^2 - 4(1)(-1260)}}{2} = \dfrac{-59 \pm \sqrt{3481 + 5040}}{2} = \dfrac{-59 \pm \sqrt{8521}}{2} = \dfrac{-59 \pm 92{,}3}{2}$ Las soluciones son $n \approx 16{,}65$ y $n \approx -75{,}65$. Como n debe ser positivo, podrá pagar los gastos como mucho 16 años.

14. El número de habitantes de una gran ciudad está aumentando de forma geométrica según puede comprobarse en la siguiente tabla:

Año	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**
Miles de habitantes	13 210	13 474,2	13 743,684	14 018,558

Calcula el número estimado de habitantes de esta ciudad para el año 2030.

Solución: Es una progresión geométrica. Calculamos la razón r: $r = \dfrac{13474{,}2}{13210} = 1{,}02$.

Tomamos como primer término a_1 la población de 2018. El año 2030 es el término $n = 2030 - 2018 + 1 = 13$. $a_{13} = a_1 \cdot r^{13-1} = 13210 \cdot (1{,}02)^{12} \approx 16753{,}474$ miles de habitantes. Es decir, aproximadamente 16753474 habitantes.

15. Una persona tiene un padre y una madre, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, y así sucesivamente. ¿Cuántos antepasados tuvo hace diez generaciones?

Solución: El número de antepasados en cada generación forma una progresión geométrica: 2, 4, 8, ... El primer término es $a_1 = 2$ (padres) y la razón es $r = 2$. El número total de antepasados en 10 generaciones es la suma de los 10 primeros términos:

$S_{10} = a_1 \dfrac{r^{10}-1}{r-1} = 2\dfrac{2^{10}-1}{2-1} = 2\cdot(1024-1) = 2\cdot 1023 = 2046$ antepasados.

Capitalización simple y compuesta. TIN, TIE y TAE

16. Calcula los intereses que generará una inversión de 10 000 €, al 6 % anual de capitalización simple y durante 8 años.

    Solución: $I = C\cdot i\cdot t = 10000\cdot 0{,}06\cdot 8 = 4800$ €.

17. ¿Qué tipo de interés simple es necesario aplicar para que un capital se triplique en 20 años?

    Solución: Si el capital se triplica, el capital final C_f es $3C_0$. Los intereses generados son $I = C_f - C_0 = 2C_0$. $I = C_0\cdot i\cdot t \Rightarrow 2C_0 = C_0\cdot i\cdot 20 \Rightarrow 2 = 20i \Rightarrow i = \dfrac{2}{20} = 0{,}10$. Se necesita un tipo de interés del 10 %.

18. ¿Cuánto tiempo tardará un capital de 100 000 euros en generar unos intereses de 10 000 euros, a un tipo de interés simple del 5 %?

    Solución: $I = C\cdot i\cdot t \Rightarrow 10000 = 100000\cdot 0{,}05\cdot t \Rightarrow 10000 = 5000\cdot t \Rightarrow t = \dfrac{10000}{5000} = 2$ años.

19. Hace 5 años invertimos una cantidad de dinero al 6 % de interés simple, y ahora nos han devuelto 30 000 €. ¿Cuál fue la inversión inicial?

    Solución: $C_f = C_0(1+it) \Rightarrow 30000 = C_0(1+0{,}06\cdot 5) \Rightarrow 30000 = C_0(1{,}3) \Rightarrow C_0 = \dfrac{30000}{1{,}3} \approx 23077$ €.

20. Calcula el capital final de un capital inicial de 5000 € al 8 % de interés simple anual colocado durante:

    a. Un semestre.

    b. Un trimestre.

    c. Ocho meses.

    d. Veinte semanas.

    e. Cien días.

    Solución:

    a. $t = 0{,}5$ años. $C_f = 5000(1+0{,}08\cdot 0{,}5) = 5000(1{,}04) = 5200$ €.

    b. $t = 0{,}25$ años. $C_f = 5000(1+0{,}08\cdot 0{,}25) = 5000(1{,}02) = 5100$ €.

    c. $t = 8/12$ años. $C_f = 5000\left(1+0{,}08\cdot\dfrac{8}{12}\right) \approx 5000(1{,}0533) = 5266{,}67$ €.

d. $t = 20/52$ años. $C_f = 5000\left(1+0,08\cdot\frac{20}{52}\right) \approx 5000(1,0308) = 5153,85$ €.

e. $t = 100/365$ años. $C_f = 5000\left(1+0,08\cdot\frac{100}{365}\right) \approx 5000(1,0219) = 5109,59$ €.

21. ¿Qué capital hay que devolver en un préstamo de 24 000 €, mediante reembolso único a los 5 años, si tiene un interés compuesto anual del 9 %?

Solución: $C_f = C_0(1+i)^t = 24000(1+0,09)^5 = 24000(1,5386) \approx 36926,98$ €.

22. Calcula el montante o capital final de 200 000 €, colocados al 2 % de interés semestral, durante 5 años y con capitalización compuesta mensual.

Solución: El interés es del 2 % semestral, lo que equivale a un 4 % anual. El tipo de interés mensual es $i = \frac{0,04}{12}$. El tiempo es $t = 5\,\text{años} = 60$ meses.

$$C_f = C_0(1+i_{mensual})^{nt} = 200000\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{60} \approx 200000(1,221) = 244198,60 \text{ €}.$$

23. Hace 5 años, invertimos una cantidad de dinero al 7 % de interés compuesto y nos han devuelto 50 000 € brutos. ¿Cuál fue la inversión inicial?

Solución: $C_f = C_0(1+i)^t \Rightarrow 50000 = C_0(1+0,07)^5 \Rightarrow C_0 = \frac{50000}{(1,07)^5} \approx 35649$ €.

24. Calcula los intereses que produce un capital de 80 000 € colocado durante un semestre en capitalización simple a un tipo de interés:

a. 5 % anual.

b. 2 % trimestral.

c. 0,3 % mensual.

Solución: El tiempo es $t = 0,5$ años = 2 trimestres = 6 meses.

a. $I = 80000\cdot 0,05\cdot 0,5 = 2000$ €.

b. $I = 80000\cdot 0,02\cdot 2 = 3200$ €.

c. $I = 80000\cdot 0,003\cdot 6 = 1440$ €.

25. Se invierten 1000 € al 3 % de interés anual compuesto mensualmente. ¿Qué tipo de interés simple se necesita para obtener una cantidad igual después de un año?

Solución: Capital final compuesto: $C_f = 1000\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{12} = 1000(1,0025)^{12} \approx 1030,42$ €. Para obtener la misma cantidad con interés simple: $1030,42 = 1000(1+i\cdot 1) \Rightarrow 1,03042 = 1+i \Rightarrow i = 0,03042$.
Se necesita un tipo de interés simple del 3,042 %.

26. Determina el tipo de interés al que estuvo impuesto un capital de 20 000 €, durante diez años, sabiendo que el interés que produjo fue de 14 000 €.

Solución: $I = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 14000 = 20000 \cdot i \cdot 10 \Rightarrow 14000 = 200000 \cdot i \Rightarrow i = \dfrac{14000}{200000} = 0{,}07$. El tipo de interés fue del 7 %.

27. Calcula el valor que tiene un capital C, que vence a los 10 meses, para que sea equivalente a otro capital de 1000 €, con vencimiento a 6 meses, sabiendo que en ambos casos el tipo de interés simple anual es del 4,25 %.

Solución: El valor actual de 1000 € a 6 meses es $VP = \dfrac{1000}{1+0{,}0425\cdot(6/12)} = \dfrac{1000}{1{,}02125} \approx 979{,}19$ €.

El capital C a 10 meses debe tener el mismo valor actual:

$$979{,}19 = \frac{C}{1+0{,}0425\cdot(10/12)} \Rightarrow C = 979{,}19\cdot(1+0{,}035416) \approx 1013{,}85 \text{ €.}$$

28. Calcula la TAE correspondiente a un depósito bancario con un TIN del 1 % si los intereses se pagan por semestres.

Solución: $TAE = \left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n - 1 = \left(1+\dfrac{0{,}01}{2}\right)^2 - 1 = (1{,}005)^2 - 1 = 0{,}010025$. La TAE es del 1,0025 %.

29. Un depósito en una entidad financiera por un importe de 10 000 €, al 4 % de interés compuesto anual, generó un capital final de 12 166,53 €. ¿Cuánto tiempo estuvo depositado?

Solución: $C_f = C_0(1+i)^t \Rightarrow 12166{,}53 = 10000(1+0{,}04)^t \Rightarrow 1{,}216653 = (1{,}04)^t$.

$$t = \log_{1{,}04}(1{,}216653) = \frac{\log(1{,}216653)}{\log(1{,}04)} \approx 5 \text{ años.}$$

30. Una empresa debe decidir entre dos proyectos de inversión con el mismo coste inicial. El proyecto A le reportará unos beneficios de 20 000 € dentro de 5 años, y con el proyecto B obtendrá un beneficio de 18 000 € dentro de 4 años. Si el tipo de interés compuesto de ambos proyectos es del 4,5 %, ¿qué proyecto debe elegir?

Solución: Calculamos el valor presente (VP) de los beneficios de cada proyecto.

$VP(A) = \dfrac{20000}{(1+0{,}045)^5} \approx 16049{,}02$ €. $VP(B) = \dfrac{18000}{(1+0{,}045)^4} \approx 15094{,}09$ €. Debe elegir el proyecto A, ya que su valor presente es mayor.

31. Halla el tiempo necesario que tiene que estar depositado un capital, al 6 % de interés compuesto, para que se duplique.

Solución: $2C_0 = C_0(1+0{,}06)^t \Rightarrow 2 = (1{,}06)^t \Rightarrow t = \log_{1{,}06}(2) = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}06)} \approx 11{,}9$ años.

32. Una cuenta de ahorro de un banco ofrece un TIN del 2,23 % y abono mensual de intereses. Si se deposita 1000 € a un año de plazo, calcula los intereses brutos que se recibirán cada mes y los intereses totales al finalizar el año.

Solución: Interés mensual: $i = \frac{0,0223}{12} \approx 0,0018583$. Intereses del primer mes: $1000 \cdot i \approx 1,86$ €.

Capital al final del año: $C_f = 1000\left(1 + \frac{0,0223}{12}\right)^{12} \approx 1022,53$ €. Intereses totales:

$1022,53 - 1000 = 22,53$ €. Los intereses de cada mes irán aumentando ligeramente debido a la capitalización.

33. Se contratan dos depósitos, A y B, ambos a un año y a un TIN al 10 %. Calcula la TAE de ambos depósitos si en el primero los intereses se liquidan al finalizar el plazo y, en el segundo, se liquidan mensualmente.

Solución: Depósito A (liquidación anual): $n = 1$. TAE = TIN = 10 %. Depósito B (liquidación mensual): $n = 12$. TAE = $\left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{12} - 1 \approx 1,10471 - 1 = 0,10471$. La TAE es del 10,47 %.

34. Un depósito por importe de 50 000 € tiene un TIN del 1,4 % y una duración de dos años. ¿Cuáles son los rendimientos obtenidos después de impuestos?

Solución: Suponiendo liquidación anual. Intereses brutos: $I = 50000 \cdot 0,014 \cdot 2 = 1400$ €. Suponiendo una retención del 19 %: Impuestos = $1400 \cdot 0,19 = 266$ €. Rendimientos netos: $1400 - 266 = 1134$ €.

35. Una persona contrata un depósito bancario por importe de 5000 € a un TIN del 4 % anual, durante seis meses, y los intereses se pagan al vencimiento. ¿Qué intereses recibirá? ¿Cuál es la TAE?

Solución: Intereses: $I = 5000 \cdot 0,04 \cdot 0,5 = 100$ €. Como los intereses se pagan al vencimiento (liquidación única al final), la TAE coincide con el TIN, es decir, TAE = 4 %.

36. Una cuenta ahorro online ofrece un 0,20 % TAE, a un plazo de un año, liquidación anual, sin cantidad mínima y sin comisiones. Sin embargo, el importe máximo a remunerar es de 50 000 €. Si una persona contrata este tipo de cuenta por un importe de 35 000 € y se mantiene durante un año, ¿qué intereses recibirá?

Solución: Como no hay comisiones y la liquidación es anual, TIN = TAE = 0,20 %. Intereses: $I = 35000 \cdot 0,0020 \cdot 1 = 70$ €.

37. Una entidad financiera nos concede un préstamo de 60 000 €, al 8 % anual, capitalización compuesta anual y que amortizaremos dentro de dos años y medio.

a. Calcula el capital que tendremos que devolver dentro de dos años y medio.

b. Si los gastos iniciales de formalización del préstamo ascienden a 380 €, ¿cuál es la TAE?

Solución:

a. $C_f = 60000(1+0{,}08)^{2,5} \approx 72729{,}51$ €.

b. La TAE debe reflejar el coste total, incluyendo los gastos. El capital real recibido es $60000 - 380 = 59620$ €. El capital a devolver es $72729{,}51$ €.

$72729{,}51 = 59620(1+TAE)^{2,5} \Rightarrow (1+TAE)^{2,5} = \dfrac{72729{,}51}{59620} \Rightarrow TAE \approx 0{,}0827$. La TAE es del 8,27 %.

38. Se deposita 3000 €, durante 12 meses, con liquidación mensual de intereses y al 3,45 % de TIN. Calcula la TAE.

Solución: TAE = $\left(1+\dfrac{0{,}0345}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}03506$. La TAE es del 3,51 %.

39. Una persona realiza las siguientes imposiciones, en las fechas indicadas y a los tipos de interés aplicados.

Fecha	Importe (€)	Tipo de interés
01/01/2020	1000	3,5 % primer año
01/01/2021	5000	3 % segundo año
01/07/2022	3000	2,5 % tercer año

Calcula el capital final que recibirá esta persona a los tres años de haber realizado la primera imposición.

Solución: Calculamos el capital al 01/01/2023.

– Imposición 1 (1000 €):
  - Año 1 (2020): $1000 \cdot (1+0{,}035) = 1035$ €
  - Año 2 (2021): $1035 \cdot (1+0{,}03) = 1066{,}05$ €
  - Año 3 (2022): $1066{,}05 \cdot (1+0{,}025) = 1092{,}70$ €

– Imposición 2 (5000 €):
  - Año 2 (2021): $5000 \cdot (1+0{,}03) = 5150$ €
  - Año 3 (2022): $5150 \cdot (1+0{,}025) = 5278{,}75$ €

– Imposición 3 (3000 €):
  - Medio año 3 (2022): $3000 \cdot (1+0{,}025 \cdot 0{,}5) = 3037{,}5$ €

Capital final total = $1092{,}70 + 5278{,}75 + 3037{,}5 = 9408{,}95$ €.

Capitalización y amortización

40. Calcula el capital final de una cuenta de ahorro en la que se depositan 18 pagos al principio de cada mes por importe de 200 € si el tipo de interés es del 3 %.

Solución: Anualidad de capitalización: $a = 200$, $t = 18$ meses, $i_{anual} = 0{,}03$,

$i_{mensual} = 0{,}03/12 = 0{,}0025$. $C = a(1+i)\dfrac{(1+i)^t - 1}{i} = 200(1{,}0025)\dfrac{(1{,}0025)^{18} - 1}{0{,}0025} \approx 3686{,}72$ €.

41. Para obtener 50 000 € en ocho años, un banco ofrece un plan de ahorro a un interés anual del 3,5 %. ¿Qué aportación debemos realizar al principio de cada mes?

Solución: $C = 50000$, $t = 8 \cdot 12 = 96$ meses, $i_{anual} = 0{,}035$, $i_{mensual} = 0{,}035/12$.

$$a = \frac{C \cdot i}{(1+i)\left[(1+i)^t - 1\right]} = \frac{50000 \cdot (0{,}035/12)}{(1+0{,}035/12)\left[(1+0{,}035/12)^{96} - 1\right]} \approx 450{,}75 \text{ €}.$$

42. Vanesa decide ingresar en una cuenta de ahorro 4000 euros al comienzo de cada año, durante 30 años, con el fin de ahorrar para el futuro. ¿Cuál será el capital final obtenido si el tipo de interés garantizado durante toda la vida del depósito es del 7 %?

Solución: $a = 4000$, $t = 30$ años, $i = 0{,}07$.

$$C = a(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{i} = 4000(1{,}07)\frac{(1{,}07)^{30} - 1}{0{,}07} \approx 404.292{,}17 \text{ €}$$

43. Si un préstamo de 1200 € se devuelve en cuotas mensuales durante medio año, devengando un interés del 9 %, calcula la cuota mensual del préstamo y la tabla de amortización.

Solución: $C = 1200$, $t = 6$ meses, $i_{anual} = 0{,}09$, $i_{mensual} = 0{,}09/12 = 0{,}0075$. Cuota mensual:

$$a = C\frac{i}{1-(1+i)^{-t}} = 1200\frac{0{,}0075}{1-(1{,}0075)^{-6}} \approx 205{,}28 \text{ €}.$$

La cuota mensual del préstamo es de 205, 28 € . Mientras que la tabla de amortización es la siguiente:

Mes	Cuota	Amortización	Intereses	Cuota pendiente
0	0	0	0	1.200
1	205,28	196,28	9,00	1.003,72
2	205,28	197,75	7,53	805,97
3	205,28	199,24	6,04	606,73
4	205,28	200,73	4,55	406,00
5	205,28	202,23	3,05	203,77
6	205,28	203,77	1,51	0,00

Total adeudado: 205, 28 × 6 = 1.231, 68 €

(La última cuota se ajustaría para que el capital pendiente sea 0).

44. Se considera un préstamo al consumo al TIN del 7 %, por importe de 10 000 €, a devolver en cuatro meses. Calcula la tabla de amortización.

Solución: $C = 10000$, $t = 4$ meses, $i_{anual} = 0{,}07$, $i_{mensual} = 0{,}07/12$.

Cuota: $a = 10000 \dfrac{0{,}07/12}{1-\left(1+0{,}07/12\right)^{-4}} \approx 2536{,}56$ €.

Utilizando el simulador del Banco de España se obtiene la siguiente tabla de amortización:

Mes	Cuota	Amortización	Intereses	Cuota pendiente
0	0	0	0	10.000,00
1	2536,56	2.478,23	58,33	7.521,77
2	2536,56	2.492,68	43,88	5.029,09
3	2536,56	2.507,22	29,34	2.521,87
4	2536,58	2.521,87	14,71	0,00

Observa como la última cuota es distinta a las anteriores para ajustar el importe del préstamo. El total pagado por el préstamo es 10.146, 26 €, siendo 146, 26 € los intereses.

45. Se tiene contratada una hipoteca de 95 000 €, a un TIN del 1,3 %, durante 15 años. Si después de pagar la quinta cuota, se recibe una herencia y se decide cancelarla, ¿qué capital queda pendiente?

Solución: $C = 95000$, $t = 180$ meses, $i_{anual} = 0{,}013$, $i_{mensual} = 0{,}013/12$. Cuota:

$a = 95000 \dfrac{0{,}013/12}{1-\left(1+0{,}013/12\right)^{-180}} \approx 581{,}19$ €. Consultando el simulador del Banco de España, después de la quinta cuota que un capital pendiente de 92 603,45 €.

Aplicaciones

46. **Cooperativa de crédito.** Una cooperativa de crédito paga un interés del 4 % anual compuesto trimestralmente en un plan de ahorro. Si se deposita 4000 €, ¿cuánto habrá en la cuenta después de dos años?

Solución: $C_0 = 4000$, $i_{anual} = 0{,}04$, $n = 4$ (trimestral), $t = 2$ años.

$$C_f = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = 4000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4\cdot 2} \approx 4331{,}43 \text{ €}.$$

47. **Cuenta Naranja.** Una cuenta de ahorro ofrece un TIN del 2,23 %, una TAE del 2,25 % y abono mensual de intereses, durante un año. Si se depositan 10 000 €, ¿cuál es la rentabilidad?

Solución: La rentabilidad viene dada por la TAE. El capital final será $C_f = 10000\cdot\left(1+0{,}0225\right) = 10225$ €. La rentabilidad (intereses) es de 225 €.

48. **Cuenta Nómina.** Una cuenta nómina ofrece un TIN del 5 %, durante un año, con liquidación semestral de intereses, siendo el saldo máximo para remunerar de 5000 €.

a. Si durante todo el periodo se mantiene un saldo superior a 5000 €, ¿qué remuneración bruta recibirá cada uno de los dos semestres? ¿Y al finalizar el año?

b. La retención del IRPF para los intereses bancarios inferiores a 6000 € es del 19 %. ¿Qué intereses netos recibirá en su cuenta nómina al finalizar el año?

Solución:

a. El interés se calcula sobre el máximo remunerable, 5000 €. Interés semestral: $i = 0,05 / 2 = 0,025$. I = Crt = $5000 \cdot 0,025 = 125$ €. Recibirá125 € cada semestre y, por tanto, 250 € al finalizar el año:

b. Los Intereses netos son: $0,81 \cdot 250 = 202,50$ €.

49. **Cambia de banco.** «Si cambias de banco nos encargamos de las gestiones de forma gratuita para que traigas tus productos y recibos. Y, además, te ofrecemos un depósito a un año al 5 % TAE, con un saldo máximo a remunerar de 5000 €». Calcula los intereses si el depósito es de 5000 € y la liquidación de intereses es:

a. Mensual

b. Al vencimiento.

Solución:

a. El TIN es del 4,89 % Los intereses mensuales son: $I = C \cdot I \cdot t = 5000 \cdot \frac{0,0489}{12} \cdot 1 = 20,375$ € y, por tanto, los anuales $20,375 \cdot 12 = 244,50$ €.

b. Si es al vencimiento, el TIN=TAE y

$I = C \cdot I \cdot t = 5000 \cdot 0,05 \cdot 1 = 250$ €

50. **Equipos de climatización.** El dueño de un restaurante necesita de manera urgente 12 000 € para comprar equipos de climatización. Para ello, pide información a tres entidades financieras diferentes, A, B y C. La primera le ofrece un TAE del 6 %, la segunda un TIN del 5,5 % pagadero mensualmente y la tercera un interés trimestral del 1,75 %. ¿Cuál de las tres entidades le ofrece mejores condiciones si el préstamo piensa devolverlo en un único pago dentro de un año?

Solución: Comparamos las TAE de las tres opciones. A: TAE = 6 %. B: TIN = 5,5 % mensual. TAE = $\left(1+\frac{0,055}{12}\right)^{12} - 1 \approx 5,64$ %. C: Interés trimestral 1,75 %. TAE = $(1+0,0175)^4 - 1 \approx 7,19$ %. La opción más barata (menor TAE) es la B.

51. **Eficiencia energética de una casa.** Una pareja va a llevar a cabo una obra en su casa para mejorar su eficiencia energética. Para ello solicitan un préstamo bancario para ese fin cuyas condiciones son mucho mejores que para un préstamo personal. En concreto necesitan 28 000 € y el TIN es del 4,8 %, sin gastos ni comisiones. Desean averiguar cuál sería la cuota mensual si el plazo de devolución es de 4 años.

Solución: $C = 28000$, $t = 48$ meses, $i_{anual} = 0{,}048$, $i_{mensual} = 0{,}048/12 = 0{,}004$.

$$a = 28000\frac{0{,}004}{1-(1{,}004)^{-48}} \approx 642{,}21 \text{ €}.$$

52. **Préstamo para viaje.** Javier quiere realizar un viaje que le cuesta 10 000 €. Como vive al día y no tiene ahorros, consulta en su banco y le ofrecen un préstamo al 3,75 %. Si quiere pagar una cuota mensual de 400 €, ¿a qué plazo debe solicitarlo?

Solución: $C = 10000$, $a = 400$, $i_{anual} = 0{,}0375$, $i_{mensual} = 0{,}0375/12 = 0{,}003125$.

$$C = a\frac{1-(1+i)^{-t}}{i} \Rightarrow 10000 = 400\frac{1-(1{,}003125)^{-t}}{0{,}003125} \Rightarrow 25 = \frac{1-(1{,}003125)^{-t}}{0{,}003125}.$$

$$0{,}078125 = 1-(1{,}003125)^{-t} \Rightarrow (1{,}003125)^{-t} = 0{,}921875.$$

$-t\log(1{,}003125) = \log(0{,}921875) \Rightarrow -t = \frac{-0{,}0353}{0{,}00135} \approx -26$. Debe solicitarlo a un plazo de 26 meses (2 años y 2 meses).

53. **Renovación de instalaciones.** Una pequeña empresa quiere adaptar sus instalaciones con el fin de cuidar el medioambiente y reducir el consumo energético. Con este fin, solicita a su banco de referencia un préstamo por importe de 60 000 €, sin comisiones de amortización o cancelación anticipada, a un TIN del 3 % y durante 6 años. Calcula la cuota mensual que tendrá que pagar.

Solución: $C = 60000$, $t = 72$ meses, $i_{anual} = 0{,}03$, $i_{mensual} = 0{,}03/12 = 0{,}0025$.

$$a = 60000\frac{0{,}0025}{1-(1{,}0025)^{-72}} \approx 911{,}62 \text{ €}.$$

54. **Cuenta de ahorro.** Dos jóvenes han contratado una cuenta de ahorro al 5 % de interés anual, con el fin de poder realizar un viaje dentro de 18 meses que les cuesta 10 000 €. ¿Cuánto tendrán que ingresar el día 1 de cada mes para conseguir ese importe?

Solución: $C = 10000$, $t = 18$ meses, $i_{anual} = 0{,}05$, $i_{mensual} = 0{,}05/12$.

$$a = \frac{C\cdot i}{(1+i)\left[(1+i)^{t}-1\right]} = \frac{10000\cdot(0{,}05/12)}{(1+0{,}05/12)\left[(1+0{,}05/12)^{18}-1\right]} \approx 533{,}90 \text{ €}.$$