Atrévete

1. Investiga sobre las innovaciones que se están llevando a cabo a nivel de materiales y configuración de estos.

   Solución: Las innovaciones en materiales y configuración de latas cilíndricas para bebidas se centran en la sostenibilidad y la eficiencia. En materiales, se investiga el uso de aleaciones de aluminio más ligeras y resistentes, así como recubrimientos internos más ecológicos que eviten el uso de BPA. También hay interés en materiales compuestos o bioplásticos, aunque su aplicación en latas de bebida es aún limitada. En cuanto a la configuración, las innovaciones buscan optimizar la relación superficie-volumen para reducir la cantidad de material. Esto incluye diseños que minimicen la superficie total para un volumen dado, como las latas "sleek" o "slim" que ya se mencionan, o formas que mejoren la apilabilidad y el transporte. La investigación también se enfoca en procesos de fabricación más eficientes que reduzcan el consumo de energía y los residuos.

2. ¿Cuánto deben medir el diámetro y la altura de lata para minimizar los costes?

   Solución: Sea .*r*. el radio de la lata y *h* su altura. El volumen de la lata es $V = \pi r^2 h$. El volumen dado es $33\text{ cl} = 330\text{ cm}^3 = 0{,}33\text{ dm}^3$. Entonces, .

   El coste del material de la base y la tapa es de 0,1€/ dm. El coste del material de la parte circular es de 0,2€dm^2.

   El área de la base y la tapa es $2\cdot\pi r^2$. El área de la parte circular es $2\pi rh$.

   La función de coste total $C(r,h)$ es: $C(r,h) = 0{,}1\cdot(2\pi r^2) + 0{,}2\cdot(2\pi rh) = 0{,}2\pi r^2 + 0{,}4\pi rh$.

   Sustituimos *h*: $C(r) = 0{,}2\pi r^2 + 0{,}4\pi r\left(\frac{0{,}33}{\pi r^2}\right) = 0{,}2\pi r^2 + \frac{0{,}4\cdot 0{,}33}{r} = 0{,}2\pi r^2 + \frac{0{,}132}{r}$.

   Para minimizar el coste, calculamos la derivada de $C(r)$ con respecto a *r* e igualamos a cero: $C'(r) = 0{,}2\pi(2r) - \frac{0{,}132}{r^2} = 0{,}4\pi r - \frac{0{,}132}{r^2}$.

   Igualamos a cero: $0{,}4\pi r - \frac{0{,}132}{r^2} = 0$ $0{,}4\pi r = \frac{0{,}132}{r^2}$ $0{,}4\pi r^3 = 0{,}132$ $r^3 = \frac{0{,}132}{0{,}4\pi} = \frac{0{,}33}{\pi}$

   $r = \sqrt[3]{\frac{0{,}33}{\pi}} \approx \sqrt[3]{0{,}10504} \approx 0{,}4719\,\text{dm}$.

   Calculamos la segunda derivada para verificar que es un mínimo:

   $C''(r) = 0{,}4\pi + \frac{2\cdot 0{,}132}{r^3} = 0{,}4\pi + \frac{0{,}264}{r^3}$. Para $r > 0$, $C''(r) > 0$, lo que confirma que es un mínimo.

   Ahora calculamos *h*: $h = \frac{0{,}33}{\pi r^2} = \frac{0{,}33}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{0{,}33}{\pi}}\right)^2} = \frac{0{,}33}{\pi\left(\frac{0{,}33}{\pi}\right)^{2/3}} = \frac{0{,}33^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}33}{\pi}} = r$. En este caso, la altura es igual al radio. $h \approx 0{,}4719\,\text{dm}$.

   El diámetro $D = 2r \approx 2\cdot 0{,}4719 = 0{,}9438\,\text{dm}$.

   En centímetros: Diámetro $\approx 9{,}438\,\text{cm}$. Altura $\approx 4{,}719\,\text{cm}$.

3. ¿Cuánto costaría entonces?

Solución: Sustituimos $r \approx 0,4719\,\text{dm}$ en la función de coste: $C(r) = 0,2\pi r^2 + \dfrac{0,132}{r}$

$C(0,4719) = 0,2\pi(0,4719)^2 + \dfrac{0,132}{0,4719}\, C(0,4719) \approx 0,2\pi(0,2227) + 0,2797.$

$C(0,4719) \approx 0,1399 + 0,2797 \approx 0,4196$ €.

El coste mínimo sería aproximadamente 0,42 €.

1. El problema de la recta tangente

1. Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados: **a)** $f(x) = 3 - x^2,\ P(-1,2)$. **b)** $f(x) = 2x + 5,\ P(1,7)$

Solución: La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ viene dada por $f'(a)$.

a) $f(x) = 3 - x^2,\ P(-1,2)$ Primero, calculamos la derivada de $f(x)$: $f'(x) = -2x$. Luego, evaluamos la derivada en $x = -1$: $m = f'(-1) = -2(-1) = 2$. La pendiente de la recta tangente en $P(-1,2)$ es 2.

b) $f(x) = 2x + 5,\ P(1,7)$ Primero, calculamos la derivada de $f(x)$: $f'(x) = 2$. Luego, evaluamos la derivada en $x = 1$: $m = f'(1) = 2$. La pendiente de la recta tangente en $P(1,7)$ es 2. (Es una recta, su pendiente es constante).

2. Determina la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos indicados: a) $f(x) = 3x^2 + 4x,\ P(1,7)$ b) $f(x) = x^3 + 1,\ P(0,1)$

Solución: La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

a) $f(x) = 3x^2 + 4x,\ P(1,7)$ Primero, calculamos la derivada de $f(x)$: $f'(x) = 6x + 4$. Luego, evaluamos la derivada en $x = 1$ para obtener la pendiente: $m = f'(1) = 6(1) + 4 = 10$. El punto es $P(1,7)$, así que $a = 1$ y $f(a) = 7$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 7 = 10(x - 1)\ y - 7 = 10x - 10\ y = 10x - 3$.

b) $f(x) = x^3 + 1,\ P(0,1)$ Primero, calculamos la derivada de $f(x)$: $f'(x) = 3x^2$. Luego, evaluamos la derivada en $x = 0$ para obtener la pendiente: $m = f'(0) = 3(0)^2 = 0$. El punto es $P(0,1)$, así que $a = 0$ y $f(a) = 1$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 0(x - 0)\ y - 1 = 0\ y = 1$.

3. Tasas de variación

3. Costes y beneficios. Los ingresos, en millones de euros, de una empresa después de t años de funcionamiento se estiman por: $I(t) = 0,2t^2 + 5t$

a) Calcula la tasa de variación media de los ingresos entre el primer y el segundo año de funcionamiento.

b) ¿A qué ritmo de crecimiento se estiman los ingresos al inicio del segundo año de funcionamiento?

Solución:

a) Tasa de variación media de los ingresos entre el primer y el segundo año de funcionamiento. El primer año es $t = 1$ y el segundo año es $t = 2$. $I(1) = 0,2(1)^2 + 5(1) = 0,2 + 5 = 5,2$ millones de euros.

$I(2) = 0,2(2)^2 + 5(2) = 0,2(4) + 10 = 0,8 + 10 = 10,8$ millones de euros.

La tasa de variación media (TVM) es: $\text{TVM} = \dfrac{I(2) - I(1)}{2-1} = \dfrac{10,8 - 5,2}{1} = 5,6$ millones de euros/año.

b) ¿A qué ritmo de crecimiento se estiman los ingresos al inicio del segundo año de funcionamiento? El ritmo de crecimiento al inicio del segundo año ($t = 1$) es la tasa de variación instantánea, que es la derivada de $I(t)$ evaluada en $t = 1$. Primero, calculamos la derivada de $I(t)$: $I'(t) = 0,2(2t) + 5 = 0,4t + 5$. Luego, evaluamos $I'(t)$ en $t = 1$: $I'(1) = 0,4(1) + 5 = 0,4 + 5 = 5,4$ millones de euros/año.

4. Estudio de poblaciones. Observa los datos de la tabla siguiente, en la que figura la evolución de la población española en millones de habitantes. Halla la tasa de variación media del crecimiento entre:

a) 1930 y 1991

b) 1991 y 2018

c) 1930 y 2018

Año	1930	1960	1991	2012	2018
Población (millones)	23,7	30,6	39,4	46,8	46,7

Solución: La tasa de variación media (TVM) se calcula como $\dfrac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$.

a) **Entre 1930 y 1991** $P(1930) = 23,7$ millones. $P(1991) = 39,4$ millones.

$\text{TVM}_{1930-1991} = \dfrac{39,4 - 23,7}{1991 - 1930} = \dfrac{15,7}{61} \approx 0,2574$ millones de habitantes/año.

b) **Entre 1991 y 2018** $P(1991) = 39,4$ millones. $P(2018) = 46,7$ millones.

$\text{TVM}_{1991-2018} = \dfrac{46,7 - 39,4}{2018 - 1991} = \dfrac{7,3}{27} \approx 0,2704$ millones de habitantes/año.

c) **Entre 1930 y 2018** $P(1930) = 23,7$ millones. $P(2018) = 46,7$ millones.

$\text{TVM}_{1930-2018} = \dfrac{46,7 - 23,7}{2018 - 1930} = \dfrac{23}{88} \approx 0,2614$ millones de habitantes/año.

4. Técnicas de derivación

5. Calcula la derivada en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x},\ x = 2$

b) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^3},\ x = -1$

Solución:

a) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x},\ x = 2$ Reescribimos $f(x)$ como $f(x) = x^3 + 3x^{1/2}$. Calculamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$. Evaluamos en $x = 2$:

$f'(2) = 3(2)^2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 3(4) + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 12 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

b) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^3},\ x = -1$ Reescribimos $f(x)$ como $f(x) = 2x - x^{-2}$. Calculamos la derivada:

$f^{'(x)} = 2 + 2x^{-3} = -\frac{1}{2x^2}$. Evaluamos en $x = -1$: $f'(-1) = 0$

6. Encuentra la ecuación de la recta normal a la curva $y = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 1)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: Sea $f(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 1)$. Primero, encontramos el valor de y en $x = 2$:

$f(2) = (2-1)(2^3 - 3(2)^2 + 1) = (1)(8 - 3(4) + 1) = 1(8 - 12 + 1) = 1(-3) = -3$. El punto de tangencia es $(2,-3)$.

Ahora, calculamos la derivada de $f(x)$ para encontrar la pendiente de la recta tangente. $f'(x) = (1)(x^3 - 3x^2 + 1) + (x-1)(3x^2 - 6x)$. Evaluamos $f'(x)$ en $x = 2$:

$f'(2) = (2^3 - 3(2)^2 + 1) + (2-1)(3(2)^2 - 6(2))\ f'(2) = (8 - 12 + 1) + (1)(12 - 12)\ f'(2) = (-3) + (1)(0) = -3$.

La pendiente de la recta tangente es $m_t = -3$.

La pendiente de la recta normal m_n es el recíproco negativo de la pendiente de la tangente: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$.

La ecuación de la recta normal en el punto $(2,-3)$ es: $y - (-3) = \frac{1}{3}(x-2)\ y + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

$3(y+3) = x - 2\ 3y + 9 = x - 2\ x - 3y - 11 = 0$.

7. Un tipo de tumor cancerígeno se puede modelar por una esfera de radio r. ¿A qué ritmo cambia el volumen con respecto al radio cuando $r = 1\,\text{cm}$?

Solución: El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El ritmo al que cambia el volumen con respecto al radio es la derivada de V con respecto a r, $\frac{dV}{dr}$.

$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$. Evaluamos esta derivada cuando $r = 1\,\text{cm}$:

$\frac{dV}{dr}\Big|_{r=1} = 4\pi(1)^2 = 4\pi \, cm^3 / cm$. El volumen cambia a un ritmo de $4\pi \, cm^3 / cm$ cuando el radio es 1cm.

8. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 12$ en los puntos de intersección con los ejes.

Solución: Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 12$.

Puntos de intersección con los ejes: *Intersección con el eje y (cuando $x = 0$):*

$f(0) = \frac{1}{4}(0)^2 - 2(0) - 12 = -12$. Punto: $(0, -12)$.

Intersección con el eje x (cuando $y = 0$): $\frac{1}{4}x^2 - 2x - 12 = 0$. Multiplicamos por 4 para eliminar la fracción: $x^2 - 8x - 48 = 0$. Usamos la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$ $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2}$ $x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2}$ $x = \frac{8 \pm 16}{2}$. Dos soluciones:

$x_1 = \frac{8 + 16}{2} = \frac{24}{2} = 12$. Punto: $(12, 0)$. $x_2 = \frac{8 - 16}{2} = \frac{-8}{2} = -4$. Punto: $(-4, 0)$.

Derivada de la función: $f'(x) = \frac{1}{4}(2x) - 2 = \frac{1}{2}x - 2$.

Ecuaciones de las rectas tangentes: *En* $(0, -12)$: Pendiente $m = f'(0) = \frac{1}{2}(0) - 2 = -2$. Ecuación: $y - (-12) = -2(x - 0)$ $y + 12 = -2x$ $y = -2x - 12$.

En $(12, 0)$: Pendiente $m = f'(12) = \frac{1}{2}(12) - 2 = 6 - 2 = 4$. Ecuación: $y - 0 = 4(x - 12)$ $y = 4x - 48$.

En $(-4, 0)$: Pendiente $m = f'(-4) = \frac{1}{2}(-4) - 2 = -2 - 2 = -4$. Ecuación: $y - 0 = -4(x - (-4))$ $y = -4(x + 4)$ $y = -4x - 16$.

9. Encuentra las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$

d) $f(x) = \frac{2x - 3}{3x - 1}$

e) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - x + 1}$

f) $f(x) = \frac{2 - x}{3 - 2x}$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}\quad f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2-1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}\quad f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-3)-(x+2)\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}\quad f'(x)=\dfrac{3x^2\cdot\left(x^2+2\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{x^4+6x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}\quad .f'(x)=\dfrac{2\cdot(3x-1)-(2x-3)\cdot 3}{(3x-1)^2}=\dfrac{7}{(3x-1)^2}.$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}\quad f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2-x+1\right)-(x+1)\cdot(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{x^2-x+1-\left(2x^2+x-2x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{-x^2-2x+2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{2-x}{3-2x}\quad f'(x)=\dfrac{(-1)\cdot(3-2x)-(2-x)\cdot(-2)}{(3-2x)^2}=\dfrac{1}{(3-2x)^2}$

10. Halla la ecuacion de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ que pasa por el punto $(-1,5)$.

Solución:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

Sea $P(x_0,y_0)=P\left(x_0,\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$

El punto de tangencia de la curva. Entonces, la ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$\left(y-\frac{x_0}{x_0-1}\right)=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)$$

Como tiene que pasar por el punto $(-1,5)$ debe verificar:

$$\left(5-\frac{x_0}{x_0-1}\right)=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(-1-x_0)\Rightarrow 5(x_0-1)^2-x_0(x_0-1)=1+x_0\Rightarrow 4x_0^2-10x_0+4=0\Rightarrow x_{0_1}=2,x_{0_2}=\frac{1}{2}$$

Por tanto, los dos puntos de tangencia son: $P_1(2,2),P_2\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$

Como $f'(2)=-1$, la ecuación de la recta tangente en $P_1(2,2)$ es:

$$y-2=-1(x-2)\Rightarrow x+y-4=0$$

Y, como $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$, entonces la ecuación de la recta tangente en $P_2\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ es:

$$y+1=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 4x+y-1=0$$

11. Calcula la derivada de .

a) Realizando previamente la división.

b) Utilizando la derivada del cociente.

Solución:

a) Realizamos la división.

$$\begin{array}{r} x \\ x-3\overline{)x^2-3x+6} \\ \underline{-x^2} \\ -3x+6 \\ \underline{+3x} \\ 6 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D = dc + r \\ \dfrac{D}{d} = c + \dfrac{r}{d} \end{array}}$$

b) $g(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x} = (x-3) + \dfrac{6}{x}$ Por tanto, $g'(x) = 1 - \dfrac{6}{x^2}$

$$g(x) = \frac{x^2-3x+6}{x} \quad g'(x) = \frac{(2x-3)\cdot x - (x^2-3x+6)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-3x-x^2+3x-6}{x^2} = \frac{x^2-6}{x^2}$$

12. Estudio científico. El efecto de introducir una toxina en una colonia de bacterias se puede modelar mediante la función $P(t) = \dfrac{12t+5}{t^2+2}$, donde P es la población de la colonia (en millones de individuos) al cabo de t horas de introducir la toxina. ¿A qué ritmo cambia la población una hora después de haber introducido la toxina? ¿En ese momento la población está aumentando o disminuyendo?

Solución: El ritmo de cambio de la población es la derivada de $P(t)$ con respecto a t. $P(t) = \dfrac{12t+5}{t^2+2}$. Usamos la regla del cociente: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. $u = 12t+5 \Rightarrow u' = 12$

$v = t^2+2 \Rightarrow v' = 2t$ $P'(t) = \dfrac{12(t^2+2)-(12t+5)(2t)}{(t^2+2)^2}$ $P'(t) = \dfrac{12t^2+24-(24t^2+10t)}{(t^2+2)^2}$

$P'(t) = \dfrac{12t^2+24-24t^2-10t}{(t^2+2)^2}$ $P'(t) = \dfrac{-12t^2-10t+24}{(t^2+2)^2}$.

Ahora evaluamos $P'(t)$ en $t=1$ (una hora después): $P'(1) = \dfrac{-12(1)^2-10(1)+24}{(1^2+2)^2} = \dfrac{-12-10+24}{(1+2)^2} =$

$\dfrac{2}{3^2} = \dfrac{2}{9}$.

El ritmo de cambio de la población una hora después de haber introducido la toxina es $\dfrac{2}{9}$ millones de individuos/hora. Dado que $P'(1) = \dfrac{2}{9} > 0$, la población está aumentando en ese momento.

13. Halla los coeficientes a, b y c de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$, sabiendo que pasa por el punto $P(2,5)$, y que $f'(2)=3$ y $f''(2)=2$.

Solución: La función es $f(x)=ax^2+bx+c$. Calculamos la primera y segunda derivada: $f'(x)=2ax+b$. $f''(x)=2a$.

Usamos las condiciones dadas: **1. Pasa por** $P(2,5)$**:**

$f(2)=5\Rightarrow a(2)^2+b(2)+c=5\Rightarrow 4a+2b+c=5$. (Ecuación 1)

2. $f'(2)=3$: $f'(2)=3\Rightarrow 2a(2)+b=3\Rightarrow 4a+b=3$. (Ecuación 2)

3. $f''(2)=2$: $f''(2)=2\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$. (Ecuación 3)

Sustituimos $a=1$ en la Ecuación 2: $4(1)+b=3\Rightarrow 4+b=3\Rightarrow b=-1$.

Sustituimos $a=1$ y $b=-1$ en la Ecuación 1: $4(1)+2(-1)+c=5\ 4-2+c=5\ 2+c=5\ c=3$.

Los coeficientes de la parábola son $a=1$, $b=-1$ y $c=3$. La parábola es $f(x)=x^2-x+3$.

14. Determina si la función $y=2x^3$ verifica $y''-y=0$. Para todo x.

Solución: La función es $y=2x^3$. Calculamos la primera derivada: $y'=6x^2$. . Calculamos la segunda derivada: $y''=12x$.

Ahora sustituimos y y y'' en la ecuación $y''-y=0$. : $12x-(2x^3)=0$. $12x-2x^3=0$. Esta ecuación no se cumple para todo x. Por ejemplo, si $x=1$, $12(1)-2(1)^3=12-2=10\neq 0$. Por lo tanto, la función $y=2x^3$ NO verifica la ecuación $y''-y=0$ para todo x.

5. Regla de la cadena o derivación compuesta

15. Aplica la regla de la cadena para derivar las funciones:

a) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)^3$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2x+5}}$ **c)** $f(x)=\left(\dfrac{2x}{3x-1}\right)^2$

Solución:

a) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)^3$ Sea $u=\dfrac{x+2}{x^2-1}$. Entonces $f(x)=u^3$, y $f'(x)=3u^2\cdot u'$. Primero, calculamos u' (usando la regla del cociente):

$$u'=\frac{1(x^2-1)-(x+2)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-(2x^2+4x)}{(x^2-1)^2}=$$

$\dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$. Ahora, sustituimos u y u' en $f'(x)$: $f'(x)=3\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)^2\cdot\left(\dfrac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}\right)=$

$$\frac{3(x+2)^2(-x^2-4x-1)}{(x^2-1)^2(x^2-1)^2}=\frac{-3(x+2)^2(x^2+4x+1)}{(x^2-1)^4}.$$

b) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2x+5}}$ Reescribimos $f(x)=\left(\frac{x}{2x+5}\right)^{1/2}$. Sea $u=\frac{x}{2x+5}$. Entonces $f(x)=u^{1/2}$, y $f'(x)=\frac{1}{2}u^{-1/2}\cdot u'$. Primero, calculamos u' (usando la regla del cociente):

$u'=\frac{1(2x+5)-x(2)}{(2x+5)^2}=\frac{2x+5-2x}{(2x+5)^2}=\frac{5}{(2x+5)^2}$. Ahora, sustituimos u y u' en $f'(x)$:

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2x+5}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{5}{(2x+5)^2}\right)$ $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+5}{x}}\cdot\frac{5}{(2x+5)^2}=\frac{5\sqrt{2x+5}}{2\sqrt{x}(2x+5)^2}=\frac{5}{2\sqrt{x}(2x+5)^{3/2}}.$

c) $f(x)=\left(\frac{2x}{3x-1}\right)^2$ Sea $u=\frac{2x}{3x-1}$. Entonces $f(x)=u^2$, y $f'(x)=2u\cdot u'$. Primero, calculamos u' (usando la regla del cociente): $u'=\frac{2(3x-1)-2x(3)}{(3x-1)^2}=\frac{6x-2-6x}{(3x-1)^2}=\frac{-2}{(3x-1)^2}$. Ahora, sustituimos u y u' en $f'(x)$: $f'(x)=2\left(\frac{2x}{3x-1}\right)\cdot\left(\frac{-2}{(3x-1)^2}\right)=\frac{4x(-2)}{(3x-1)(3x-1)^2}=\frac{-8x}{(3x-1)^3}.$

16. Calcula las derivadas primera y segunda de estas funciones:

a) $f(x)=(x^3-3x)^5$ **b)** $f(x)=\frac{3}{x^2}$ **c)** $f(x)=\sqrt{1-x}$

Solución:

a) $f(x)=(x^3-3x)^5$ *Primera derivada:* $f'(x)=5(x^3-3x)^4\cdot(3x^2-3)=15(x^2-1)(x^3-3x)^4$.

Segunda derivada: Usamos la regla del producto para

$f'(x)=15(x^2-1)(x^3-3x)^4$. Sea $u=15(x^2-1)\Rightarrow u'=15(2x)=30x$. Sea

$v=(x^3-3x)^4\Rightarrow v'=4(x^3-3x)^3(3x^2-3)=12(x^2-1)(x^3-3x)^3$.

$f''(x)=u'v+uv'$ $f''(x)=30x(x^3-3x)^4+15(x^2-1)\cdot12(x^2-1)(x^3-3x)^3$

$f''(x)=30x(x^3-3x)^4+180(x^2-1)^2(x^3-3x)^3$. Podemos factorizar $(x^3-3x)^3$:

$f''(x)=(x^3-3x)^3\left[30x(x^3-3x)+180(x^2-1)^2\right]$ $f''(x)=(x^3-3x)^3\left[30x^4-90x^2+180(x^4-2x^2+1)\right]$

$f''(x)=(x^3-3x)^3\left[30x^4-90x^2+180x^4-360x^2+180\right]$ $f''(x)=(x^3-3x)^3\left[210x^4-450x^2+180\right]$.

b) $f(x)=\frac{3}{x^2}$ Reescribimos $f(x)=3x^{-2}$. *Primera derivada:* $f'(x)=3(-2)x^{-3}=-6x^{-3}=-\frac{6}{x^3}$.

Segunda derivada: $f''(x)=-6(-3)x^{-4}=18x^{-4}=\frac{18}{x^4}$.

c) $f(x)=\sqrt{1-x}$ Reescribimos $f(x)=(1-x)^{1/2}$. *Primera derivada:* $f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\cdot(-1)=$ $-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$.

Segunda derivada: $f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-3/2}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}=-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$.

6. Derivada de las funciones logarítmica y exponencial

17. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x\cdot e^{x-1}$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución: Primero, encontramos el valor de y en $x=1$: $f(1)=1\cdot e^{1-1}=1\cdot e^{0}=1\cdot 1=1$. El punto de tangencia es $(1,1)$.

Ahora, calculamos la derivada de $f(x)$ usando la regla del producto: .$(uv)'=u'v+uv'$.
$u=x\Rightarrow u'=1\; v=e^{x-1}\Rightarrow v'=e^{x-1}\cdot 1=e^{x-1}\; f'(x)=1\cdot e^{x-1}+x\cdot e^{x-1}=e^{x-1}(1+x)$.

Evaluamos $f'(x)$ en $x=1$ para obtener la pendiente de la recta tangente:
$m=f'(1)=e^{1-1}(1+1)=e^{0}(2)=1\cdot 2=2$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ con pendiente $m=2$ es: $y-1=2(x-1)$
$y-1=2x-2\; y=2x-1$.

18. Calcula las siguientes derivadas:

a) $y=\frac{1}{2-e^{-x}}$ **b)** $y=3xe^{-2x}$ **c)** $y=\ln\sqrt{\frac{2}{1-3x}}$

d) $y=x^2e^{-x}$ **e)** $y=(x+\ln x)^4$ **f)** $y=\log_3(x^2)$

g) $y=\frac{x}{1+\ln x}$ **h)** $y=\frac{e^x}{1-e^x}$ **i)** $y=3^{-x+2}$

Solución:

a) $y=\frac{1}{2-e^{-x}}$ Reescribimos $y=(2-e^{-x})^{-1}$.

$y'=-1(2-e^{-x})^{-2}\cdot(-e^{-x}\cdot(-1))=-1(2-e^{-x})^{-2}\cdot(-e^{-x})=\frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2}$.

b) $y=3xe^{-2x}$ Usamos la regla del producto: $(uv)'=u'v+uv'$. $u=3x\Rightarrow u'=3$
$v=e^{-2x}\Rightarrow v'=e^{-2x}\cdot(-2)=-2e^{-2x}\; y'=3e^{-2x}+3x(-2e^{-2x})=3e^{-2x}-6xe^{-2x}=3e^{-2x}(1-2x)$.

c) $y=\ln\sqrt{\frac{2}{1-3x}}$ Reescribimos usando propiedades de logaritmos:

$y=\ln\left(\frac{2}{1-3x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1-3x}\right)=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln(1-3x))$. Ahora derivamos:

$$y' = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{1-3x}\cdot(-3)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1-3x}\right) = \frac{3}{2(1-3x)}.$$

d) $y = x^2e^{-x}$ Usamos la regla del producto: $(uv)' = u'v + uv'$. $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v = e^{-x} \Rightarrow v' = e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x}$ $y' = 2xe^{-x} + x^2\left(-e^{-x}\right) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$.

e) $y = (x + \ln x)^4$ Usamos la regla de la cadena: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$. $y' = 4(x+\ln x)^3\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

f) $y = \log_3\left(x^2\right)$ Usamos la regla de la cadena para $\log_a u$: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$. $y' = \frac{2x}{x^2\ln 3} = \frac{2}{x\ln 3}$.

Alternativamente, $y = 2\log_3 x = 2\frac{\ln x}{\ln 3}$. $y' = 2\frac{1/x}{\ln 3} = \frac{2}{x\ln 3}$.

g) $y = \frac{x}{1+\ln x}$ Usamos la regla del cociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. $u = x \Rightarrow u' = 1$ $v = 1+\ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$y' = \frac{1(1+\ln x) - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2} = \frac{1+\ln x - 1}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}.$$

h) $y = \frac{e^x}{1-e^x}$ Usamos la regla del cociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. $u = e^x \Rightarrow u' = e^x$ $v = 1-e^x \Rightarrow v' = -e^x$

$$y' = \frac{e^x\left(1-e^x\right) - e^x\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{e^x - e^{2x} + e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

i) $y = 3^{-x+2}$ Usamos la regla de la cadena para a^u: $\left(a^u\right)' = a^u u'\ln a$.

$y' = 3^{-x+2}\cdot(-1)\cdot\ln 3 = -3^{-x+2}\ln 3$.

19. Velocidad de propagación. Según fuentes periodísticas, un rumor se propaga siguiendo la función $f(t) = \frac{1}{1+ae^{-kt}}$, donde $f(t)$ es la proporción de personas de una población que lo conocen al cabo de t días, y a y k son constantes positivas.

a) Calcula $\lim_{t\to\infty} f(t)$ e interpreta el resultado.

b) Determina la velocidad de propagación del rumor.

c) Para $a = 10$ y $k = 0,5$, ¿cuál es el ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 días?

Solución:

a) **Calcula** $\lim_{t\to\infty} f(t)$ **e interpreta el resultado.** $f(t) = \frac{1}{1+ae^{-kt}}$. Cuando $t\to\infty$, como $k>0$, $e^{-kt}\to 0$. Entonces, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+ae^{-kt}} = \frac{1}{1+a\cdot 0} = \frac{1}{1} = 1$. Interpretación: A largo plazo, el rumor se propagará a toda la población, es decir, la proporción de personas que lo conocen tenderá a 1 (o al 100%).

b) **Determina la velocidad de propagación del rumor.** La velocidad de propagación es la derivada de $f(t)$ con respecto a t. Reescribimos $f(t)=\left(1+ae^{-kt}\right)^{-1}$.

$f'(t)=-1\left(1+ae^{-kt}\right)^{-2}\cdot\left(a\cdot e^{-kt}\cdot(-k)\right)$ $f'(t)=-1\left(1+ae^{-kt}\right)^{-2}\cdot\left(-kae^{-kt}\right)$ $f'(t)=\dfrac{kae^{-kt}}{\left(1+ae^{-kt}\right)^{2}}$.

c) **Para $a=10$ y $k=0,5$, ¿cuál es el ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 días?** Sustituimos $a=10$ y $k=0,5$ en $f'(t)$: $f'(t)=\dfrac{0,5\cdot 10\cdot e^{-0,5t}}{\left(1+10e^{-0,5t}\right)^{2}}=\dfrac{5e^{-0,5t}}{\left(1+10e^{-0,5t}\right)^{2}}$. Ahora evaluamos en $t=12$: $f'(12)=\dfrac{5e^{-0,5\cdot 12}}{\left(1+10e^{-0,5\cdot 12}\right)^{2}}=\dfrac{5e^{-0,6}}{\left(1+10e^{-6}\right)^{2}}$. Calculamos $e^{-0,6}\approx 0,00247875$.

$f'(12)\approx\dfrac{5\cdot 0,00247875}{\left(1+10\cdot 0,00247875\right)^{2}}=\dfrac{0,01239375}{\left(1+0,0247875\right)^{2}}=\dfrac{0,01239375}{\left(1,0247875\right)^{2}}=\dfrac{0,01239375}{1,050199}\approx 0,0118$.

El ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 días es aproximadamente 0,0118 (proporción de la población por día).

7. Derivada de las funciones trigonométricas

20. Halla las derivadas de las funciones:

a) $y=x-3\sin x$ **b)** $y=\cos 2x-\sin x$ **c)** $y=x\arctan x$

Solución:

a) $y=x-3\sin x$ $y'=1-3\cos x$.

b) $y=\cos 2x-\sin x$ $y'=-\sin(2x)\cdot 2-\cos x=-2\sin(2x)-\cos x$.

c) $y=x\arctan x$ Usamos la regla del producto: $(uv)'=u'v+uv'$. $u=x\Rightarrow u'=1$

$v=\arctan x\Rightarrow v'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $y'=1\cdot\arctan x+x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$.

21. Halla los puntos de la función $f(x)=2\sin x+\sin^2 x$ en los que la recta tangente es horizontal.

Solución: Una recta tangente es horizontal cuando su pendiente es cero, es decir, cuando la primera derivada de la función es cero. $f(x)=2\sin x+\sin^2 x$. Calculamos la derivada de $f(x)$: $f'(x)=2\cos x+2\sin x\cos x$. Igualamos $f'(x)$ a cero: $2\cos x+2\sin x\cos x=0$. Factorizamos $2\cos x$: $2\cos x(1+\sin x)=0$. Esto implica que $2\cos x=0$ o $1+\sin x=0$.

Caso 1: $2\cos x=0\Rightarrow\cos x=0$ Las soluciones generales para $\cos x=0$ son $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, donde $n\in\mathbb{Z}$. Para $n=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Para $n=1$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Caso 2: $1+\sin x=0\Rightarrow\sin x=-1$ La solución general para $\sin x=-1$ es $x=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi$, donde $n\in\mathbb{Z}$. Para $n=0$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Los valores de x en los que la recta tangente es horizontal son $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$. Ahora encontramos los valores de y para estos puntos: Para $x=\frac{\pi}{2}$:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=2(1)+(1)^2=2+1=3$. Punto: $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$.

Para $x=\frac{3\pi}{2}$: $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2(-1)+(-1)^2=-2+1=-1$. Punto: $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$.

Los puntos en los que la recta tangente es horizontal son $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$.

8. Funciones crecientes y decrecientes

22. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2+2$ **b)** $f(x)=2x^4-4x^2+3$ **c)** $f(x)=xe^{-x}$

d) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ **e)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$

Solución: Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, analizamos el signo de la primera derivada $f'(x)$.

a) $f(x)=x^3-3x^2+2$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. Puntos críticos ($f'(x)=0$): $3x(x-2)=0\Rightarrow x=0$ o $x=2$. Intervalos: $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$.

- En $(-\infty,0)$: Tomamos $x=-1$, $f'(-1)=3(-1)(-1-2)=(-3)(-3)=9>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(0,2)$: Tomamos $x=1$, $f'(1)=3(1)(1-2)=3(-1)=-3<0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(2,\infty)$: Tomamos $x=3$, $f'(3)=3(3)(3-2)=9(1)=9>0$. $f(x)$ es creciente.

Intervalos de crecimiento: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(0,2)$.

b) $f(x)=2x^4-4x^2+3$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)=8x(x-1)(x+1)$. Puntos críticos ($f'(x)=0$): $8x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=0$, $x=1$ o $x=-1$. Intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$.

- En $(-\infty,-1)$: Tomamos $x=-2$, $f'(-2)=8(-2)\left((-2)^2-1\right)=-16(3)=-48<0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(-1,0)$: Tomamos $x=-0.5$, $f'(-0.5)=8(-0.5)\left((-0.5)^2-1\right)=-4(0.25-1)=-$ $-4(-0.75)=3>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(0,1)$: Tomamos $x=0.5$, $f'(0.5)=8(0.5)\left((0.5)^2-1\right)=4(0.25-1)=4(-0.75)=-3<0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(1,\infty)$: Tomamos $x=2$, $f'(2)=8(2)(2^2-1)=16(3)=48>0$. $f(x)$ es creciente.

Intervalos de crecimiento: $(-1,0)\cup(1,\infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

c) $f(x)=xe^{-x}$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}(1-x)$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $e^{-x}(1-x)=0$. Como $e^{-x}>0$ para todo x, entonces $1-x=0\Rightarrow x=1$. Intervalos: $(-\infty,1)$, $(1,\infty)$.

- En $(-\infty,1)$: Tomamos $x=0$, $f'(0)=e^{0}(1-0)=1>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(1,\infty)$: Tomamos $x=2$, $f'(2)=e^{-2}(1-2)=-e^{-2}<0$. $f(x)$ es decreciente.

Intervalos de crecimiento: $(-\infty,1)$. Intervalos de decrecimiento: $(1,\infty)$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ Dominio: $x^2-4\neq 0\Rightarrow(x-2)(x+2)\neq 0\Rightarrow x\neq 2, x\neq -2$. . Dominio: $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$. $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2-4\right)-x^2(2x)}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{2x^3-8x-2x^3}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $\dfrac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\Rightarrow -8x=0\Rightarrow x=0$. Los puntos $x=-2$ y $x=2$ no son puntos críticos, sino asíntotas verticales. Intervalos: $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$.

- En $(-\infty,-2)$: Tomamos $x=-3$, $f'(-3)=\dfrac{-8(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\dfrac{24}{(9-4)^2}=\dfrac{24}{25}>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(-2,0)$: Tomamos $x=-1$, $f'(-1)=\dfrac{-8(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\dfrac{8}{(1-4)^2}=\dfrac{8}{(-3)^2}=\dfrac{8}{9}>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(0,2)$: Tomamos $x=1$, $f'(1)=\dfrac{-8(1)}{\left(1^2-4\right)^2}=\dfrac{-8}{(-3)^2}=-\dfrac{8}{9}<0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(2,\infty)$: Tomamos $x=3$, $f'(3)=\dfrac{-8(3)}{\left(3^2-4\right)^2}=\dfrac{-24}{(9-4)^2}=-\dfrac{24}{25}<0$. $f(x)$ es decreciente.

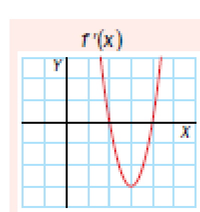
Intervalos de crecimiento: $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$. Intervalos de decrecimiento: $(0,2)\cup(2,\infty)$.

e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ Dominio: $[-\infty,\infty)$. $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: No hay, ya que $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ nunca es cero. Puntos donde $f'(x)$ no existe: $x=0$. Intervalo: $(0,\infty)$.

- En $(0,\infty)$: Tomamos $x=1$, $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}>0$. $f(x)$ es creciente.

Intervalos de crecimiento: $(0,\infty)$. Intervalos de decrecimiento: No hay.

23. Se conoce la gráfica de la derivada de una función $f(x)$. ¿En qué intervalos es creciente o decreciente dicha función?



Solución: Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, observamos el signo de $f'(x)$ en la gráfica.

- Si $f'(x) > 0$, la función $f(x)$ es creciente.
- Si $f'(x) < 0$, la función $f(x)$ es decreciente.

Supongamos que la gráfica de $f'(x)$ es una parábola que abre hacia arriba y corta el eje x en x_1 y x_2 (con $x_1 < x_2$), entonces:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, x_1)$ y en (x_2, ∞). Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.
- $f'(x) < 0$ en (x_1, x_2). Por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en (x_1, x_2).

  En x_1, $f(x)$ pasa de creciente a decreciente, por lo que hay un máximo relativo. En x_2, $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, por lo que hay un mínimo relativo.

9. Extremos relativos

24. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 12$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ **c)** $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

Solución: Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, analizamos el signo de la primera derivada $f'(x)$. Los extremos relativos ocurren donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe y el signo de $f'(x)$ cambia.

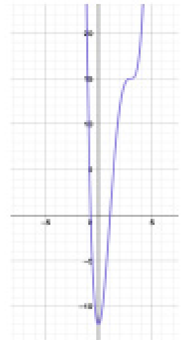
a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 12$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x-3)^2$.

Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $4x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$. Intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, \infty)$.

- En $(-\infty, 0)$: Tomamos $x = -1$, $f'(-1) = 4(-1)(-1-3)^2 = -4(-4)^2 = -4(16) = -64 < 0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(0, 3)$: Tomamos $x = 1$, $f'(1) = 4(1)(1-3)^2 = 4(-2)^2 = 4(4) = 16 > 0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(3, \infty)$: Tomamos $x = 4$, $f'(4) = 4(4)(4-3)^2 = 16(1)^2 = 16 > 0$. $f(x)$ es creciente.

Intervalos de crecimiento: $(0, \infty)$. Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$. Extremos relativos:

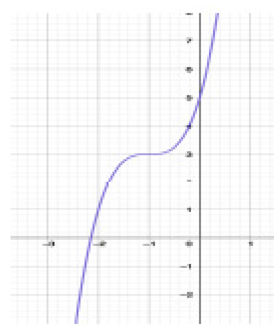
- En $x = 0$, $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, por lo que hay un mínimo relativo. $f(0) = -12$. Mínimo relativo en $(0, -12)$.
- En $x = 3$, $f(x)$ no cambia de signo, por lo que no hay extremo relativo.



b) $f(x)=2x^3+6x^2+6x+5$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=6x^2+12x+6=6(x^2+2x+1)=6(x+1)^2$. Puntos críticos ($f'(x)=0$): $6(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$. Intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,\infty)$.

- En $(-\infty,-1)$: Tomamos $x=-2$, $f'(-2)=6(-2+1)^2=6(-1)^2=6>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(-1,\infty)$: Tomamos $x=0$, $f'(0)=6(0+1)^2=6>0$. $f(x)$ es creciente.

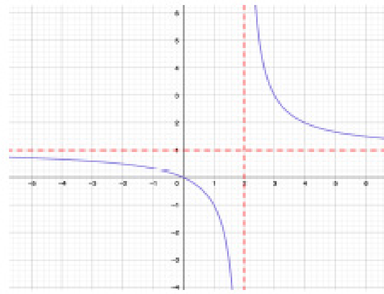
  Intervalos de crecimiento: $(-\infty,\infty)$. Intervalos de decrecimiento: No hay. Extremos relativos: No hay, ya que $f'(x)$ no cambia de signo en $x=-1$.



c) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. $f'(x)=\dfrac{1(x-2)-x(1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x-2-x}{(x-2)^2}=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$. Puntos críticos ($f'(x)=0$): No hay, ya que $-2\neq 0$. Puntos donde $f'(x)$ no existe: $x=2$ (asíntota vertical). Intervalos: $(-\infty,2)$, $(2,\infty)$.

- En $(-\infty,2)$: Tomamos $x=0$, $f'(0)=\dfrac{-2}{(0-2)^2}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}<0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(2,\infty)$: Tomamos $x=3$, $f'(3)=\dfrac{-2}{(3-2)^2}=\dfrac{-2}{1}=-2<0$. $f(x)$ es decreciente.

Intervalos de crecimiento: No hay. Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Extremos relativos: No hay.



d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ Dominio: $\mathbb{R}$ (el denominador x^2+3 nunca es cero).

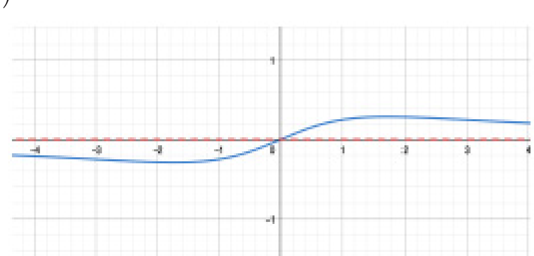
$f'(x)=\dfrac{1(x^2+3)-x(2x)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2}=\dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$. Puntos críticos ($f'(x)=0$):

$3-x^2=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\sqrt{3}$ o $x=-\sqrt{3}$. Intervalos: $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\infty)$.

- En $(-\infty,-\sqrt{3})$: Tomamos $x=-2$, $f'(-2)=\dfrac{3-(-2)^2}{((-2)^2+3)^2}=\dfrac{3-4}{(4+3)^2}=\dfrac{-1}{49}<0$. $f(x)$ es decreciente.
- En $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$: Tomamos $x=0$, $f'(0)=\dfrac{3-0^2}{(0^2+3)^2}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}>0$. $f(x)$ es creciente.
- En $(\sqrt{3},\infty)$: Tomamos $x=2$, $f'(2)=\dfrac{3-2^2}{(2^2+3)^2}=\dfrac{3-4}{(4+3)^2}=\dfrac{-1}{49}<0$. $f(x)$ es decreciente.

Intervalos de crecimiento: $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$. Extremos relativos:

- En $x=-\sqrt{3}$, $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, por lo que hay un mínimo relativo. $f(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+3}=\dfrac{-\sqrt{3}}{3+3}=\dfrac{-\sqrt{3}}{6}$. Mínimo relativo en $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.
- En $x=\sqrt{3}$, $f(x)$ pasa de creciente a decreciente, por lo que hay un máximo relativo. $f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Máximo relativo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$.



25. Esboza la gráfica de una función que cumple: $f'(-1) = f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$, si $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$, si $x \in (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Solución: Analizamos las condiciones de la derivada primera:

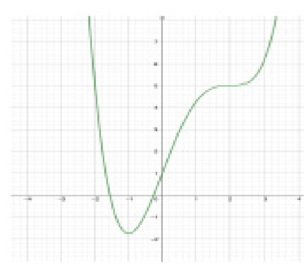
- $f'(-1) = 0$ y $f'(2) = 0$: Puntos críticos en $x = -1$ y $x = 2$.
- $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$: $f(x)$ es decreciente.
- $f'(x) > 0$ en $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$: $f(x)$ es creciente.

Con esta información, podemos determinar los extremos relativos:

- En $x = -1$: $f(x)$ pasa de decreciente a creciente. Por lo tanto, hay un mínimo relativo en $x = -1$.
- En $x = 2$: $f(x)$ es creciente antes de $x = 2$ y sigue siendo creciente después de $x = 2$. Esto significa que $f'(x)$ no cambia de signo en $x = 2$. Por lo tanto, no hay un extremo relativo en $x = 2$. Es un punto de inflexión con tangente horizontal.

Para esbozar la gráfica, podemos asumir algunos valores para $f(x)$ en los puntos críticos. Por ejemplo, $f(-1) = 0$ y $f(2) = 2$.

La gráfica desciende hasta $x = -1$, donde alcanza un mínimo. Luego asciende, con una pendiente que se hace cero en $x = 2$ (punto de inflexión con tangente horizontal), y continúa ascendiendo.



26. Razona por qué la función $g(x) = 1 + (x-2)^3$ tiene un punto con derivada nula que no es extremo relativo.

Solución: Primero, calculamos la primera derivada de $g(x)$:

$g'(x) = 3(x-2)^2 \cdot 1 = 3(x-2)^2$. Igualamos $g'(x)$ a cero para encontrar los puntos críticos:

$3(x-2)^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. En $x = 2$, la derivada es nula.

Ahora, analizamos el signo de $g'(x)$ alrededor de $x = 2$:

- Para $x < 2$: Por ejemplo, $x = 1$. $g'(1) = 3(1-2)^2 = 3(-1)^2 = 3 > 0$.
- Para $x > 2$: Por ejemplo, $x = 3$. $g'(3) = 3(3-2)^2 = 3(1)^2 = 3 > 0$.

Como $g'(x) > 0$ tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 2$, la función $g(x)$ es creciente en ambos lados de $x = 2$. Dado que la función no cambia de ser creciente a decreciente (o viceversa) en $x = 2$, no hay un extremo relativo (ni máximo ni mínimo) en este punto. En $x = 2$, la función tiene un punto de inflexión con tangente horizontal.

10. Máximos y mínimos absolutos

27. Encuentra los máximos y mínimos absolutos para las siguientes funciones e intervalos:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5, [-1, 4]$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2, [0, 3]$

c) $f(x) = -x^2 + 2x, [0, 1]$ **d)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}, [-1, 1]$

Solución: Para encontrar los extremos absolutos en un intervalo cerrado, evaluamos la función en los puntos críticos dentro del intervalo y en los extremos del intervalo.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5, [-1, 4]$ 1. Derivada: $f'(x) = 2x + 4$. 2. Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$. 3. El punto crítico $x = -2$ no está en el intervalo $[-1, 4]$. 4. Evaluamos $f(x)$ en los extremos del intervalo: $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 5 = 1 - 4 - 5 = -8$. $f(4) = (4)^2 + 4(4) - 5 = 16 + 16 - 5 = 27$. 5. Comparación: El mínimo absoluto es -8 en $x = -1$. El máximo absoluto es 27 en $x = 4$.

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2, [0, 3]$ 1. Derivada: $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$. 2. Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $6x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -1$. 3. El punto crítico $x = 0$ está en el intervalo $[0, 3]$. El punto $x = -1$ no está en el intervalo. 4. Evaluamos $f(x)$ en el punto crítico dentro del intervalo y en los extremos del intervalo: $f(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 + 2 = 2$. $f(3) = 2(3)^3 + 3(3)^2 + 2 = 2(27) + 3(9) + 2 = 54 + 27 + 2 = 83$. 5. Comparación: El mínimo absoluto es 2 en $x = 0$. El máximo absoluto es 83 en $x = 3$.

c) $f(x) = -x^2 + 2x, [0, 1]$ 1. Derivada: $f'(x) = -2x + 2$. 2. Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. 3. El punto crítico $x = 1$ está en el intervalo $[0, 1]$. 4. Evaluamos $f(x)$ en el punto crítico y en los extremos del intervalo: $f(0) = -(0)^2 + 2(0) = 0$. $f(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$. 5. Comparación: El mínimo absoluto es 0 en $x = 0$. El máximo absoluto es 1 en $x = 1$.

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}, [-1, 1]$ 1. Derivada: $f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3) - x^2(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$. 2. Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $6x = 0 \Rightarrow x = 0$. 3. El punto crítico $x = 0$ está en el intervalo $[-1, 1]$. 4. Evaluamos $f(x)$ en el punto crítico y en los extremos del intervalo:

$f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-1)^2 + 3} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4}$. $f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2 + 3} = \frac{0}{3} = 0$. $f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2 + 3} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4}$. 5. Comparación:

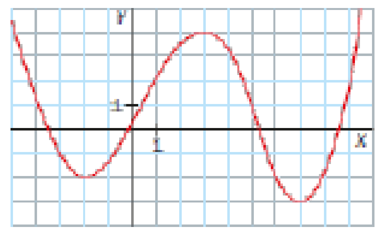
El mínimo absoluto es 0 en $x = 0$. El máximo absoluto es $\frac{1}{4}$ en $x = -1$ y $x = 1$.

28. Dibuja una función que tenga dos mínimos relativos, un máximo relativo y ningún máximo absoluto.

Solución: Para que una función no tenga máximo absoluto, debe tender a infinito en algún punto o en los límites del dominio. Un ejemplo de tal función podría ser una función polinómica de grado 4 con un coeficiente principal negativo, pero con un dominio restringido o con asíntotas. O una función que tiende a ∞ en los extremos.

Consideremos una función que se parezca a una "W" pero con los extremos subiendo indefinidamente. Por ejemplo, $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. $f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$. Puntos críticos en $x = 0, x = \pm\sqrt{5/2}$. $f''(x) = 12x^2 - 10$. $f''(0) = -10 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $x = 0$.
$f''(\pm\sqrt{5/2}) = 12(5/2) - 10 = 30 - 10 = 20 > 0 \Rightarrow$ mínimos relativos en $x = \pm\sqrt{5/2}$.
Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, esta función no tiene máximo absoluto.

La gráfica muestra dos mínimos relativos (en $x \approx \pm 1.58$) y un máximo relativo (en $x = 0$). La función tiende a $+\infty$ en ambos extremos, por lo que no tiene un máximo absoluto.



29. Prueba que la función $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$, para $x > 0$, tiene un único extremo relativo y que, por tanto, este también es absoluto.

Solución: La función es $f(x) = 4x^2 + x^{-1}$ para $x > 0$. 1. Calculamos la primera derivada: $f'(x) = 8x - x^{-2} = 8x - \frac{1}{x^2}$. 2. Encontramos los puntos críticos igualando $f'(x)$ a cero: $8x - \frac{1}{x^2} = 0$ $8x = \frac{1}{x^2}$ $8x^3 = 1$ $x^3 = \frac{1}{8}$ $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$. Dado que $x > 0$, este es el único punto crítico en el dominio. 3. Calculamos la segunda derivada para determinar la naturaleza del extremo: $f''(x) = 8 - (-2)x^{-3} = 8 + 2x^{-3} = 8 + \frac{2}{x^3}$. 4. Evaluamos $f''(x)$ en el punto crítico $x = \frac{1}{2}$: $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8 + \frac{2}{\frac{1}{8}} = 8 + 16 = 24$. Como $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 24 > 0$, el punto crítico $x = \frac{1}{2}$ corresponde a un mínimo relativo.

Dado que la función $f(x)$ es continua en su dominio $(0, \infty)$ y tiene un único extremo relativo, este mínimo relativo es también el mínimo absoluto de la función en ese dominio. Para confirmar, podemos analizar los límites en los extremos del dominio: $\lim_{x\to 0^+}\left(4x^2 + \frac{1}{x}\right) = 0 + \infty = \infty$. $\lim_{x\to\infty}\left(4x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$. Como la función tiende a infinito en ambos extremos del dominio, el único mínimo relativo debe ser el mínimo absoluto. El valor del mínimo absoluto es $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$.

30. Inversiones. Una consultoría estima que la rentabilidad de una inversión depende de la cantidad invertida, en miles de euros, y que viene dada por $R(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}1x + 1, x > 0$. Determina la cantidad que se debe invertir para maximizar la rentabilidad.

Solución: La función de rentabilidad es $R(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}1x + 1$, para $x > 0$. Para maximizar la rentabilidad, calculamos la primera derivada de $R(x)$ y la igualamos a cero. $R'(x) = -0{,}01(2x) + 0{,}1 = -0{,}02x + 0{,}1$. Igualamos a cero: $-0{,}02x + 0{,}1 = 0$ $0{,}02x = 0{,}1$

$x = \frac{0{,}1}{0{,}02} = \frac{10}{2} = 5$. El punto crítico es $x = 5$.

Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada: $R''(x) = -0{,}02$. Como $R''(x) = -0{,}02 < 0$ para todo x, el punto crítico $x = 5$ corresponde a un máximo relativo. Dado que es el único extremo relativo en el dominio $x > 0$ y la función es una parábola que abre hacia abajo, este máximo relativo es también el máximo absoluto.

La cantidad que se debe invertir para maximizar la rentabilidad es $x = 5$ miles de euros, es decir, 5000 euros. La rentabilidad máxima sería $R(5) = -0{,}01(5)^2 + 0{,}1(5) + 1 = -0{,}01(25) + 0{,}5 + 1 = -0{,}25 + 0{,}5 + 1 = 1{,}25$ miles de euros.

31. Catenaria. En matemáticas y arquitectura, se define la catenaria como aquella curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena, cuerda o cable sujeta por sus dos extremos. También se utiliza en los ferrocarriles. La ecuación general de una catenaria es: $y = 0{,}5k\left(e^{x/k} + e^{-x/k}\right)$, donde k es un parámetro que regula la apertura de la curva. Para $k = 2$, calcula el mínimo absoluto.

Solución: Para $k = 2$, la función de la catenaria es: $y = 0{,}5(2)\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) = e^{x/2} + e^{-x/2}$. Para encontrar el mínimo absoluto, calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$y' = \frac{1}{2}e^{x/2} - \frac{1}{2}e^{-x/2} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)$. Igualamos a cero: $\frac{1}{2}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right) = 0$ $e^{x/2} - e^{-x/2} = 0$ $e^{x/2} = e^{-x/2}$.

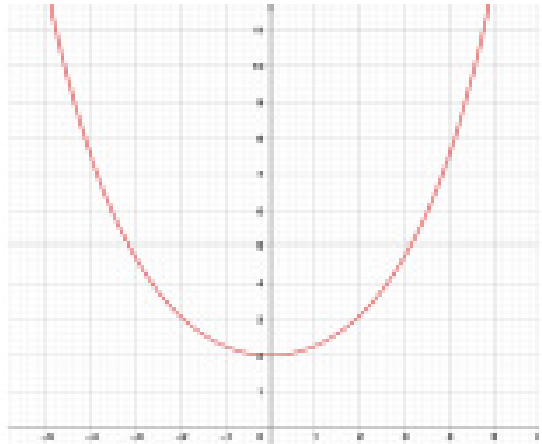
Esto implica que los exponentes deben ser iguales: $\frac{x}{2} = -\frac{x}{2}$ $x = -x$ $2x = 0 \Rightarrow x = 0$. El único punto crítico es $x = 0$.

Para verificar que es un mínimo, calculamos la segunda derivada:

$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{x/2} - \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)$. Evaluamos y'' en $x = 0$:

$y''(0) = \frac{1}{4}\left(e^{0/2} + e^{-0/2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{0} + e^{0}\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}$. Como $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$, el punto crítico $x = 0$ corresponde a un mínimo relativo.

Dado que la función es continua y el mínimo relativo es el único extremo, este es también el mínimo absoluto. El valor del mínimo absoluto es: $y(0) = e^{0/2} + e^{-0/2} = e^{0} + e^{0} = 1 + 1 = 2$. El mínimo absoluto de la catenaria para $k = 2$ es 2, que se alcanza en $x = 0$.



11. Concavidad y puntos de inflexión

32. Determina los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de las curvas:

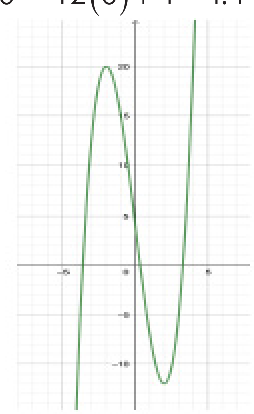
a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$ **b)** $f(x) = x^2e^x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

Solución: Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad, analizamos el signo de la segunda derivada $f''(x)$. Los puntos de inflexión ocurren donde $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe y el signo de $f''(x)$ cambia.

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$ Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12$. Segunda derivada: $f''(x) = 6x$. Puntos donde $f''(x) = 0$: $6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

- En $(-\infty, 0)$: Tomamos $x = -1$, $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$. $f(x)$ es convexa (abierta hacia abajo).
- En $(0, \infty)$: Tomamos $x = 1$, $f''(1) = 6(1) = 6 > 0$. $f(x)$ es cóncava (abierta hacia arriba).

Intervalos de concavidad: $(0, \infty)$. Intervalos de convexidad: $(-\infty, 0)$. Puntos de inflexión: En $x = 0$, $f''(x)$ cambia de signo. $f(0) = 0^3 - 12(0) + 4 = 4$. Punto de inflexión: $(0, 4)$.

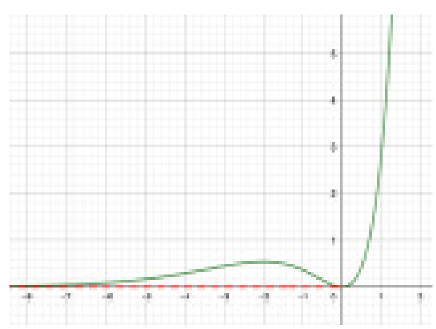


b) $f(x) = x^2e^x$ Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada (regla del producto): $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$. Segunda derivada (regla del producto):

$f''(x) = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(2x + x^2 + 2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$. Puntos donde $f''(x) = 0$: $e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$. Como $e^x > 0$, resolvemos $x^2 + 4x + 2 = 0$. Usamos la fórmula cuadrática: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Puntos donde $f''(x) = 0$: $x_1 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$ y $x_2 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$. Intervalos: $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right)$, $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$, $\left(-2+\sqrt{2}, \infty\right)$.

- En $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right)$: Tomamos $x = -4$, $f''(-4) = e^{-4}\left((-4)^2 + 4(-4) + 2\right) = e^{-4}(16 - 16 + 2) = 2e^{-4} > 0$. $f(x)$ es cóncava.
- En $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$: Tomamos $x = -1$, $f''(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 + 4(-1) + 2\right) = e^{-1}(1 - 4 + 2) = -e^{-1} < 0$. $f(x)$ es convexa.
- En $\left(-2+\sqrt{2}, \infty\right)$: Tomamos $x = 0$, $f''(0) = e^0\left(0^2 + 4(0) + 2\right) = 1(2) = 2 > 0$. $f(x)$ es cóncava.

Intervalos de concavidad: $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, \infty\right)$. Intervalos de convexidad: $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$. Puntos de inflexión: En $x_1 = -2-\sqrt{2}$ y $x_2 = -2+\sqrt{2}$, $f''(x)$ cambia de signo. $f\left(-2-\sqrt{2}\right) = \left(-2-\sqrt{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}} = \left(4 + 4\sqrt{2} + 2\right)e^{-2-\sqrt{2}} = \left(6 + 4\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}$. $f\left(-2+\sqrt{2}\right) = \left(-2+\sqrt{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}} = \left(4 - 4\sqrt{2} + 2\right)e^{-2+\sqrt{2}} = \left(6 - 4\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}$. Puntos de inflexión: $\left(-2-\sqrt{2}, \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-2+\sqrt{2}, \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$.

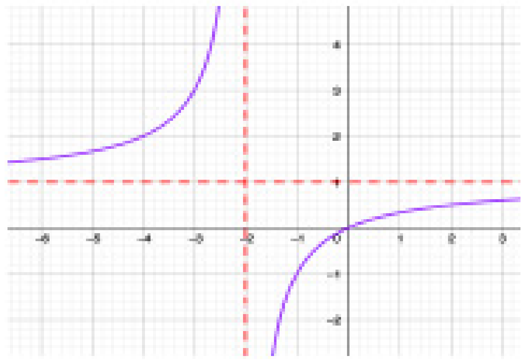


c) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Primera derivada (regla del cociente):
$f'(x) = \frac{1(x+2) - x(1)}{(x+2)^2} = \frac{x + 2 - x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} = 2(x+2)^{-2}$. Segunda derivada:
$f''(x) = 2(-2)(x+2)^{-3} \cdot 1 = -4(x+2)^{-3} = \frac{-4}{(x+2)^3}$. Puntos donde $f''(x) = 0$: No hay, ya que $-4 \neq 0$. Puntos donde $f''(x)$ no existe: $x = -2$ (asíntota vertical). Intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$.

- En $(-\infty, -2)$: Tomamos $x = -3$, $f''(-3) = \frac{-4}{(-3+2)^3} = \frac{-4}{(-1)^3} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0$. $f(x)$ es cóncava.

- En $(-2,\infty)$: Tomamos $x=0$, $f''(0)=\frac{-4}{(0+2)^3}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}<0$. $f(x)$ es convexa.

Intervalos de concavidad: $(-\infty,-2)$. Intervalos de convexidad: $(-2,\infty)$. Puntos de inflexión: No hay, ya que en $x=-2$ la función no está definida.

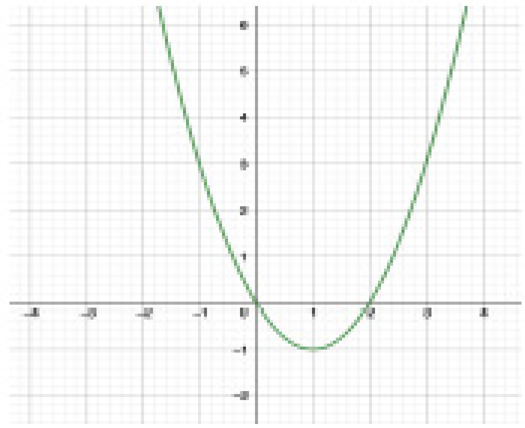


33. Dibuja la gráfica de una función con estas características: $f(0)=f(2)=0$, $f'(x)<0$ si $x<1$, $f'(x)>0$ si $x>1$, $f''(x)>0 \forall x\in\mathbb{R}$.

Solución: Analizamos las condiciones:

- $f(0)=0$ y $f(2)=0$: La función pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$.
- $f'(x)<0$ si $x<1$: La función es decreciente en $(-\infty,1)$.
- $f'(x)>0$ si $x>1$: La función es creciente en $(1,\infty)$.
- De las dos condiciones anteriores, en $x=1$, $f'(x)$ debe ser 0. $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, por lo que hay un mínimo relativo en $x=1$.
- $f''(x)>0\forall x\in\mathbb{R}$: La función es cóncava (abierta hacia arriba) en todo su dominio. Esto significa que no hay puntos de inflexión.

  Una función cuadrática (parábola) que abre hacia arriba cumple $f''(x)>0$. Si el mínimo está en $x=1$, y pasa por $(0,0)$ y $(2,0)$, la función es simétrica respecto a $x=1$. Podemos usar una parábola de la forma $f(x)=a(x-1)^2+k$. Como $f(1)$ es un mínimo, $a>0$. $f(0)=a(0-1)^2+k=a+k=0\Rightarrow k=-a$. $f(x)=a(x-1)^2-a=a\left((x-1)^2-1\right)$. Como $f(2)=0$: $a\left((2-1)^2-1\right)=a\left(1^2-1\right)=a(0)=0$. Esto se cumple para cualquier a. Elegimos $a=1$ para simplicidad. $f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x+1-1=x^2-2x$. Verificamos las condiciones: $f(0)=0^2-2(0)=0$. $f(2)=2^2-2(2)=4-4=0$. $f'(x)=2x-2=2(x-1)$. Si $x<1$, $f'(x)<0$. Si $x>1$, $f'(x)>0$. $f''(x)=2$. Como $2>0$, $f''(x)>0$ para todo x. Todas las condiciones se cumplen.



34. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2$, estudia cuándo, según los valores de a, no tiene ningún punto de inflexión o presenta uno o dos.

Solución: La función es $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2$. Calculamos la primera y segunda derivada: $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2x$. $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2$.

Los puntos de inflexión ocurren donde $f''(x) = 0$ y cambia de signo. La ecuación $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2 = 0$ es una ecuación cuadrática. El número de raíces reales de esta ecuación depende del discriminante $\Delta = (6a)^2 - 4(12)(2) = 36a^2 - 96$.

Caso 1: No tiene puntos de inflexión. Esto ocurre si $f''(x)$ nunca cambia de signo. Si $f''(x)$ no tiene raíces reales, entonces $\Delta < 0$. $36a^2 - 96 < 0$ $36a^2 < 96$ $a^2 < \frac{96}{36} = \frac{8}{3}$ $-\sqrt{\frac{8}{3}} < a < \sqrt{\frac{8}{3}}$.

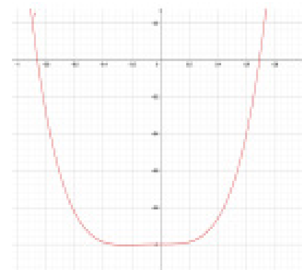
Aproximadamente, $-1.63 < a < 1.63$. En este caso, $f''(x)$ siempre tendrá el mismo signo (positivo, ya que el coeficiente de x^2 es $12 > 0$). Por lo tanto, la función siempre será cóncava y no tendrá puntos de inflexión.

Caso 2: Presenta un punto de inflexión. Esto ocurre si $f''(x)$ tiene una raíz real doble, es decir, $\Delta = 0$. $36a^2 - 96 = 0$ $a^2 = \frac{8}{3}$ $a = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Si $a = \sqrt{\frac{8}{3}}$, $f''(x) = 12x^2 + 6\sqrt{\frac{8}{3}}x + 2 = 12x^2 + 6\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + 2 = 12x^2 + 4\sqrt{6}x + 2$. Esta parábola tiene una única raíz real (doble). Sin embargo, para que sea un punto de inflexión, el signo de $f''(x)$ debe cambiar. Si $f''(x)$ tiene una raíz doble y es una parábola que abre hacia arriba, $f''(x)$ es siempre no negativa y solo es cero en la raíz doble, pero no cambia de signo. Por lo tanto, en este caso, tampoco hay punto de inflexión.

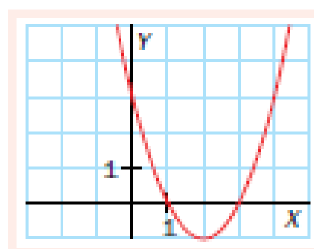
Caso 3: Presenta dos puntos de inflexión. Esto ocurre si $f''(x)$ tiene dos raíces reales distintas, es decir, $\Delta > 0$. $36a^2 - 96 > 0$ $a^2 > \frac{8}{3}$ $a < -\sqrt{\frac{8}{3}}$ o $a > \sqrt{\frac{8}{3}}$. En este caso, $f''(x)$ tiene dos raíces reales distintas, x_1 y x_2. Como $f''(x)$ es una parábola que abre hacia arriba, su signo será positivo fuera de las raíces y negativo entre ellas. Esto significa que $f''(x)$ cambiará de signo en x_1 y x_2, por lo que habrá dos puntos de inflexión.

Resumen:

- Si $-\sqrt{\frac{8}{3}} \le a \le \sqrt{\frac{8}{3}}$, la función no tiene puntos de inflexión.
- Si $a < -\sqrt{\frac{8}{3}}$ o $a > \sqrt{\frac{8}{3}}$, la función presenta dos puntos de inflexión.



35. Halla en esta gráfica de la derivada segunda de una función los intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión.



Solución: Observamos la gráfica de $f''(x)$:

- $f''(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 1$.
- $f''(x) < 0$ cuando $-1 < x < 1$.
- $f''(x) = 0$ cuando $x = -1$ y $x = 1$.

Basándonos en el criterio de la segunda derivada:

- **Intervalos de concavidad (cóncava hacia arriba):** Donde $f''(x) > 0$. Esto ocurre en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- **Intervalos de convexidad (cóncava hacia abajo):** Donde $f''(x) < 0$. Esto ocurre en $(-1, 1)$.
- **Puntos de inflexión:** Donde $f''(x) = 0$ y cambia de signo. Esto ocurre en $x = -1$ y $x = 1$.

Para determinar las coordenadas y(x) de los puntos de inflexión, necesitaríamos la función original $f(x)$. Sin ella, solo podemos indicar las abscisas de los puntos de inflexión.

36. Analiza si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) La curva $y = \frac{1}{x}$ es cóncava si $x > 0$, convexa si $x < 0$ y, por tanto, tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

b) La función $f(x)=(x-3)^4$ cumple que $f''(3)=0$ y, por consiguiente, tiene un punto de inflexión en $x=3$.

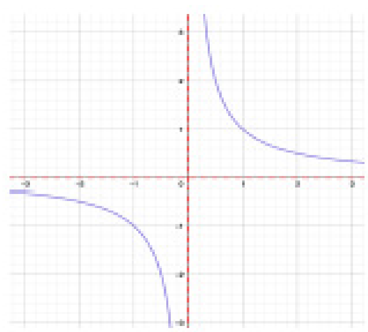
Solución:

a) **La curva** $y=\dfrac{1}{x}$ **es cóncava si** $x>0$**, convexa si** $x<0$ **y, por tanto, tiene un punto de inflexión en** $x=0$. Sea $f(x)=x^{-1}$. $f'(x)=-x^{-2}$. $f''(x)=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$.

Analizamos el signo de $f''(x)$:

- Si $x>0$, $x^3>0$, entonces $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$. La función es cóncava (abierta hacia arriba).
- Si $x<0$, $x^3<0$, entonces $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}<0$. La función es convexa (abierta hacia abajo).

La primera parte de la afirmación es verdadera: la curva es cóncava si $x>0$ y convexa si $x<0$. Sin embargo, para que haya un punto de inflexión en $x=0$, la función debe ser continua en $x=0$. La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ no está definida en $x=0$ (tiene una asíntota vertical). Por lo tanto, no puede tener un punto de inflexión en $x=0$. La afirmación es **FALSA**.



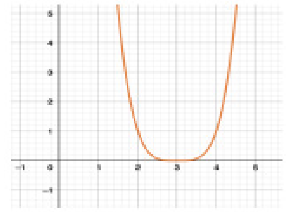
b) **La función** $f(x)=(x-3)^4$ **cumple que** $f''(3)=0$ **y, por consiguiente, tiene un punto de inflexión en** $x=3$. Sea $f(x)=(x-3)^4$. $f'(x)=4(x-3)^3$. $f^{\prime\prime(x)}=12(x-3)^2$.

Evaluamos $f''(x)$ en $x=3$: $f''(3)=12(3-3)^2=12(0)=0$. La primera parte de la afirmación es verdadera: $f''(3)=0$.

Ahora, analizamos el signo de $f''(x)$ alrededor de $x=3$:

- Si $x<3$, $x-3<0$, entonces $f''(x)=12(x-3)^2<0$. La función es convexa.
- Si $x>3$, $x-3>0$, entonces $f''(x)=12(x-3)^2>0$. La función es conveza.

Es igual en ambos lados (positivo), así que no hay cambio de concavidad, por tanto no es punto de inflexión.



37. Determina los valores de a, b, c y d en la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que esta tiene un mínimo relativo en (2,4), un máximo relativo en (4, 2) y un punto de inflexión en (3,3).

Solución: La función es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculamos las derivadas:
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $f''(x) = 6ax + 2b$.

Usamos las condiciones dadas:

1. **Mínimo relativo en (2,4):**

- Pasa por $(2,4)$: $f(2) = 4 \Rightarrow a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4$. (Ecuación 1)

- Es un extremo en x = 2: $f'(2) = 0 \Rightarrow 3a(2)^2 + 2b(2) + c = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$. (Ecuación 2)

2. **Máximo relativo en (4,2):**

- Pasa por $(4,2)$: $f(4) = 2 \Rightarrow a(4)^3 + b(4)^2 + c(4) + d = 2 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 2$. (Ecuación 3)

- Es un extremo en x = 4: $f'(4) = 0 \Rightarrow 3a(4)^2 + 2b(4) + c = 0 \Rightarrow 48a + 8b + c = 0$. (Ecuación 4)

3. **Punto de inflexión en (3,3):**

- Pasa por $(3,3)$: $f(3) = 3 \Rightarrow a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + d = 3 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 3$. (Ecuación 5)

- Es un punto de inflexión en x = 3:
$f''(3) = 0 \Rightarrow 6a(3) + 2b = 0 \Rightarrow 18a + 2b = 0 \Rightarrow 9a + b = 0$. (Ecuación 6)

Tenemos un sistema de 6 ecuaciones con 4 incógnitas. Usaremos las ecuaciones más sencillas primero. De la Ecuación 6: $b = -9a$.

Sustituimos $b = -9a$ en la Ecuación 2:
$12a + 4(-9a) + c = 0 \Rightarrow 12a - 36a + c = 0 \Rightarrow -24a + c = 0 \Rightarrow c = 24a$.

Sustituimos $b = -9a$ y $c = 24a$ en la Ecuación 4:
$48a + 8(-9a) + 24a = 0 \Rightarrow 48a - 72a + 24a = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Esto significa que las ecuaciones 2 y 4 son consistentes con $b = -9a$ y $c = 24a$.

Ahora usamos las ecuaciones que involucran d. Restamos Ecuación 1 de Ecuación 3:
$(64a + 16b + 4c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 2 - 4\ 56a + 12b + 2c = -2$. (Ecuación 7)

Sustituimos $b=-9a$ y $c=24a$ en la Ecuación 7: $56a+12(-9a)+2(24a)=-2$ $56a-108a+48a=-2$ $(56-108+48)a=-2$ $-4a=-2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Ahora que tenemos a, podemos encontrar b y c: $b=-9a=-9\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$. $c=24a=24\left(\frac{1}{2}\right)=12$.

Finalmente, sustituimos a,b,c en la Ecuación 1 para encontrar d: $8\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(-\frac{9}{2}\right)+2(12)+d=4$ $4-18+24+d=4$ $10+d=4 \Rightarrow d=-6$.

Los valores son $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{9}{2}$, $c=12$, $d=-6$. La función es $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x-6$.

Verificación de la condición de punto de inflexión: $f''(x)=6ax+2b=6\left(\frac{1}{2}\right)x+2\left(-\frac{9}{2}\right)=3x-9$.

$f''(3)=3(3)-9=9-9=0$. Esto es correcto. Para $x<3$, $f''(x)<0$ (convexa). Para $x>3$, $f''(x)>0$ (cóncava). El signo cambia, por lo que es un punto de inflexión.

38. Utiliza la derivada segunda para hallar los máximos y los mínimos relativos de la curva $y=2\sin x+\cos 2x$ en el siguiente intervalo: $[0,2\pi]$.

Solución: La función es $f(x)=2\sin x+\cos 2x$. Dominio: $[0,2\pi]$.

1. Calculamos la primera derivada: $f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$. Usamos la identidad $\sin 2x=2\sin x\cos x$: $f'(x)=2\cos x-2(2\sin x\cos x)=2\cos x-4\sin x\cos x=2\cos x(1-2\sin x)$.
2. Encontramos los puntos críticos ($f'(x)=0$): $2\cos x(1-2\sin x)=0$. Esto implica $\cos x=0$ o $1-2\sin x=0$.

Caso 1: $\cos x=0$ En el intervalo $[0,2\pi]$, las soluciones son $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$.

Caso 2: $1-2\sin x=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ En el intervalo $[0,2\pi]$, las soluciones son $x=\frac{\pi}{6}$ y $x=\frac{5\pi}{6}$.

Los puntos críticos son $x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$.

3. Calculamos la segunda derivada: $f''(x)=-2\sin x-2(2\cos 2x)=-2\sin x-4\cos 2x$.
4. Evaluamos $f''(x)$ en cada punto crítico:

- Para $x=\frac{\pi}{6}$: $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-4\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=-2\left(\frac{1}{2}\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1-4\left(\frac{1}{2}\right)=-1-2=-3$.

  Como $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3<0$, hay un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{6}$.

  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$.

- Para $x=\frac{\pi}{2}$: $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-4\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-2(1)-4\cos(\pi)=-2-4(-1)=-2+4=2$.

  Como $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2>0$, hay un mínimo relativo en $x=\frac{\pi}{2}$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi)=2(1)+(-1)=2-1=1$. Mínimo relativo en $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

- Para $x=\frac{5\pi}{6}$: $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-4\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right)=-2\left(\frac{1}{2}\right)-4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-1-4\left(\frac{1}{2}\right)=$.

  $-1-2=-3$

  Como $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3<0$, hay un máximo relativo en $x=\frac{5\pi}{6}$.

  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Máximo relativo en $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$.

- Para $x=\frac{3\pi}{2}$: $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-4\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right)=-2(-1)-4\cos(3\pi)=2-4(-1)=$

  $2+4=6$. Como $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=6>0$, hay un mínimo relativo en $x=\frac{3\pi}{2}$.

  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(3\pi)=2(-1)+(-1)=-2-1=-3$. Mínimo relativo en $\left(\frac{3\pi}{2},-3\right)$.

  Resumen de extremos relativos en $[0,2\pi]$:

- Máximos relativos: $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$.
- Mínimos relativos: $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2},-3\right)$.

12. Representación gráfica de funciones

39. Calcula los elementos característicos y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=2x^3-9x^2+12x-4$ **b)** $y=x^4-2x^2$ **c)** $y=1-\frac{1}{x}$

d) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$ **e)** $y=x^2+\frac{2}{x}$ **f)** $y=\frac{9x}{x^2+2}$

Solución:

a) $y=2x^3-9x^2+12x-4$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x=0)$: $y=-4$. Punto $(0,-4)$.
  - Eje X $(y=0)$: $2x^3-9x^2+12x-4=0$. Por el teorema de la raíz racional, probamos divisores de 4: $\pm1,\pm2,\pm4$.

    $f(2)=2(8)-9(4)+12(2)-4=16-36+24-4=0$. Así que $x=2$ es una raíz.

    Dividimos por $(x-2)$: $(2x^3-9x^2+12x-4)/(x-2)=2x^2-5x+2$.

    Resolvemos $2x^2-5x+2=0$: $x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}$. $x_1=\frac{5+3}{4}=2$, $x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$.

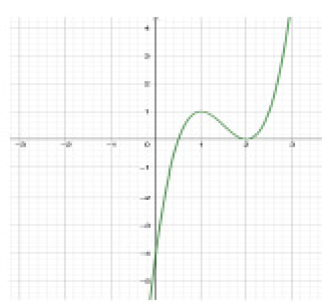
Puntos $(2,0)$ (raíz doble) y $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

- **Simetrías:** No es par ni impar.
- **Asíntotas:** No tiene asíntotas (es un polinomio).
- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:**
  $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6\left(x^2 - 3x + 2\right) = 6(x-1)(x-2)$. Puntos críticos: $x = 1, x = 2$.
  - $(-\infty,1)$: $y'(0) = 12 > 0$. Creciente.
  - $(1,2)$: $y'(1.5) = 6(0.5)(-0.5) = -1.5 < 0$. Decreciente.
  - $(2,\infty)$: $y'(3) = 6(2)(1) = 12 > 0$. Creciente.

Máximo relativo en $x = 1$: $y(1) = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$. Punto $(1,1)$. Mínimo relativo en $x = 2$: $y(2) = 0$. Punto $(2,0)$.

- **Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:** $y'' = 12x - 18 = 6(2x-3)$. Punto de inflexión potencial: $x = \frac{3}{2}$.
  - $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$: $y''(0) = -18 < 0$. Convexa.
  - $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$: $y''(2) = 6 > 0$. Cóncava.

Punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$: $y\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 18 - 4 = -\frac{54}{4} + 14 = -$
$= -\frac{27}{2} + 14 = \frac{1}{2}$. Punto $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.



b) $y = x^4 - 2x^2$

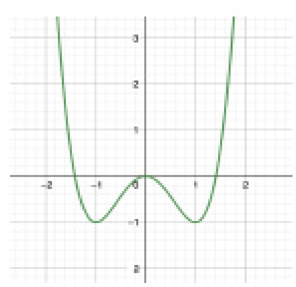
- **Dominio:** $\mathbb{R}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x = 0)$: $y = 0$. Punto $(0,0)$.
  - Eje X $(y = 0)$: $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2 - 2\right) = 0$. $x = 0$ (raíz doble), $x = \pm\sqrt{2}$. Puntos $(0,0)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$, $\left(-\sqrt{2},0\right)$.

- **Simetrías:** $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$. Es par, simétrica respecto al eje Y.
- **Asíntotas:** No tiene asíntotas.
- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:**
  $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$. Puntos críticos: $x=0, x=1, x=-1$.
  - $(-\infty,-1)$: $y'(-2)=4(-2)(3)=-24<0$. Decreciente.
  - $(-1,0)$: $y'(-0.5)=4(-0.5)(-0.75)=1.5>0$. Creciente.
  - $(0,1)$: $y'(0.5)=4(0.5)(-0.75)=-1.5<0$. Decreciente.
  - $(1,\infty)$: $y'(2)=4(2)(3)=24>0$. Creciente.

Mínimos relativos en $x=-1, x=1$: $y(-1)=1-2=-1$. $y(1)=1-2=-1$. Puntos $(-1,-1)$ y $(1,-1)$.
Máximo relativo en $x=0$: $y(0)=0$. Punto $(0,0)$.

- **Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:** $y''=12x^2-4=4(3x^2-1)$. Puntos de inflexión potencial: $3x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
  - $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$: $y''(-1)=8>0$. Cóncava.
  - $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.: $y''(0)=-4<0$. Convexa.
  - $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$: $y''(1)=8>0$. Cóncava.

Puntos de inflexión en $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$: $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1-6}{9}=-\frac{5}{9}$.
Puntos $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{5}{9}\right)$.



c) $y=1-\frac{1}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}-\{0\}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x=0)$: No hay (asíntota vertical).

– Eje X ($y=0$): $1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{x} \Rightarrow x=1$. Punto $(1,0)$.

- **Simetrías:** No es par ni impar.

- **Asíntotas:**

– Vertical: $x=0$. $\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$. $\lim_{x\to 0^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\infty$.

– Horizontal: $y=1$. $\lim_{x\to \pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$.

- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:** $y'=\frac{1}{x^2}$. Puntos críticos: No hay (y' nunca es cero).

– $(-\infty,0)$: $y'(-1)=1>0$. Creciente.

– $(0,\infty)$: $y'(1)=1>0$. Creciente.

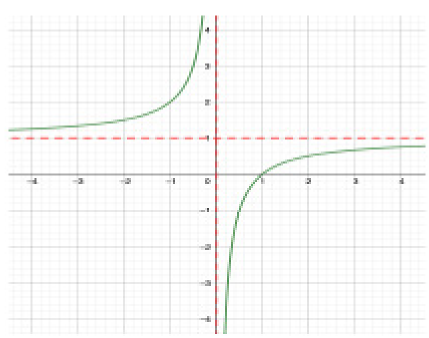
Siempre creciente en su dominio. No hay extremos relativos.

- **Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:** $y''=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$. Puntos de inflexión potencial: No hay (y'' nunca es cero).

– $(-\infty,0)$: $y''(-1)=2>0$. Cóncava.

– $(0,\infty)$: $y''(1)=-2<0$. Convexa.

No hay puntos de inflexión porque la función no es continua en $x=0$.



d) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$

- **Dominio:** $x^2-5x+6\neq 0 \Rightarrow (x-2)(x-3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 2, x\neq 3$. Dominio: $\mathbb{R}-\{2,3\}$.

- **Puntos de corte con los ejes:**

– Eje Y ($x=0$): $y=\frac{1}{6}$. Punto $\left(0,\frac{1}{6}\right)$.

– Eje X ($y=0$): No hay, ya que el numerador es 1.

- **Simetrías:** No es par ni impar.

- **Asíntotas:**
  - Verticales: x = 2 y x = 3. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{(0^+)(-)} = -\infty$. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{(+)(0^-)} = -\infty$.

    $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{(+)(0^-)} = -\infty$. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{(+)(0^+)} = +\infty$.
  - Horizontal: $y = 0$. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-5x+6} = 0$.
- Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos: $y = (x^2-5x+6)^{-1}$.

  $y' = -1(x^2-5x+6)^{-2}(2x-5) = -\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{5-2x}{(x^2-5x+6)^2}$. Puntos críticos:

  $5-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.
  - $(-\infty, 2)$: $y'(0) = \frac{5}{36} > 0$. Creciente.
  - $\left(2, \frac{5}{2}\right)$: $y'(2.1) = \frac{5-4.2}{(+)^2} > 0$. Creciente.
  - $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$: $y'(2.6) = \frac{5-5.2}{(+)^2} < 0$. Decreciente.
  - $(3, \infty)$: $y'(4) = \frac{5-8}{(+)^2} < 0$. Decreciente.

  Máximo relativo en $x = \frac{5}{2}$: $y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6} = \frac{1}{\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6} = \frac{1}{\frac{25-50+24}{4}} = \frac{1}{\frac{-1}{4}} = -4$.

  Punto $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$.
- **Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:**

  $$y'' = \frac{-2(x^2-5x+6)^2 - (5-2x)\cdot 2(x^2-5x+6)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^4}$$

  $$y'' = \frac{-2(x^2-5x+6) - 2(5-2x)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^3} = \frac{-2x^2+10x-12-2(-4x^2+20x-25)}{(x^2-5x+6)^3}$$

  $$y'' = \frac{-2x^2+10x-12+8x^2-40x+50}{(x^2-5x+6)^3} = \frac{6x^2-30x+38}{(x^2-5x+6)^3}$$. Puntos de inflexión

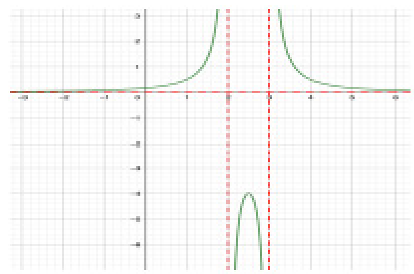
  potencial: $6x^2-30x+38 = 0 \Rightarrow 3x^2-15x+19 = 0$. Discriminante $\Delta = (-15)^2 - 4(3)(19) = 225-228 = -3 < 0$. No hay raíces reales para $y'' = 0$. Por lo tanto, y'' nunca cambia de signo. Como el denominador $(x^2-5x+6)^3$ cambia de signo en $x = 2$ y $x = 3$, la concavidad cambia.

– $(-\infty, 2)$: $y''(0) = \dfrac{38}{6^3} > 0$. Cóncava.

– $(2, 3)$: $y''(2.5) = \dfrac{6(2.5)^2 - 30(2.5) + 38}{(-1/4)^3} = \dfrac{37.5 - 75 + 38}{-1/64} = \dfrac{0.5}{-1/64} < 0$. Convexa.

– $(3, \infty)$: $y''(4) = \dfrac{6(16) - 30(4) + 38}{(16 - 20 + 6)^3} = \dfrac{96 - 120 + 38}{2^3} = \dfrac{14}{8} > 0$. Cóncava.

No hay puntos de inflexión porque la función no es continua en $x = 2, x = 3$.



e) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

- **Dominio.** La función $f(x)$ es racional y está definida para todos los números reales menos los que anulan el denominador.

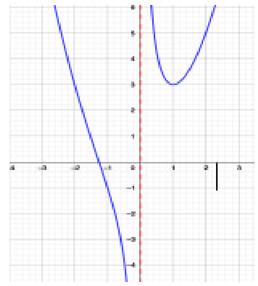
$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, entonces $\hat{U}f(0)$. Y si $f(x) = 0$, entonces $x^2 + \dfrac{2}{x} = 0 \Rightarrow x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$. Por tanto, la función solo corta al eje de ordenadas en el punto $\left(\sqrt[3]{-2}, 0\right)$.

- **n** Como $f(-x) = x^2 - \dfrac{2}{x} \neq f(x)$, no hay simetrías.

- **Asíntotas.** Asíntotas verticales. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 2}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 2}{x} = +\infty$. Asíntota vertical en $x = 0$. A la izquierda de la asíntota $x = 0$ la curva tiende hacia $-\infty$ y a la derecha hacia $+\infty$. Asíntotas horizontales. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x} = +\infty$. No hay asíntotas horizontales.

- **Crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.** $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2}$, está definida en su dominio. $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2} = 0$, para $x = 1$ que es el único punto crítico.



f) $y = \dfrac{9x}{x^2+2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$ (denominador x^2+2 nunca es cero).
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x=0)$: $y=0$. Punto $(0,0)$.
  - Eje X $(y=0)$: $9x=0 \Rightarrow x=0$. Punto $(0,0)$.
- **Simetrías:** $f(-x) = \dfrac{9(-x)}{(-x)^2+2} = \dfrac{-9x}{x^2+2} = -f(x)$. Es impar, simétrica respecto al origen.
- **Asíntotas:**
  - Vertical: No hay.
  - Horizontal: $y=0$. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{9x}{x^2+2} = 0$.
- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:**

  $y' = \dfrac{9(x^2+2)-9x(2x)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{9x^2+18-18x^2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{18-9x^2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{9(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$. Puntos críticos: $2-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

  - $(-\infty,-\sqrt{2})$: $y'(-2) = \dfrac{9(2-4)}{(4+2)^2} < 0$. Decreciente.
  - $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$: $y'(0) = \dfrac{9(2)}{2^2} > 0$. Creciente.
  - $(\sqrt{2},\infty)$: $y'(2) = \dfrac{9(2-4)}{(4+2)^2} < 0$. Decreciente.

  Mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$: $y(-\sqrt{2}) = \dfrac{-9\sqrt{2}}{2+2} = -\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. Punto $\left(-\sqrt{2},-\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\right)$. Máximo relativo en $x=\sqrt{2}$: $y(\sqrt{2}) = \dfrac{9\sqrt{2}}{2+2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. Punto $\left(\sqrt{2},\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\right)$.

- **Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:**

  $y'' = \dfrac{-18x(x^2+2)^2 - 9(2-x^2)\cdot 2(x^2+2)(2x)}{(x^2+2)^4}$

$$y'' = \frac{-18x\left(x^2+2\right)-36x\left(2-x^2\right)}{\left(x^2+2\right)^3} = \frac{-18x^3-36x-72x+36x^3}{\left(x^2+2\right)^3}\ y'' = \frac{18x^3-108x}{\left(x^2+2\right)^3} = \frac{18x\left(x^2-6\right)}{\left(x^2+2\right)^3}.$$

Puntos de inflexión potencial: $18x\left(x^2-6\right)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{6}$.

– $\left(-\infty,-\sqrt{6}\right)$: $y''(-3)=\dfrac{18(-3)(9-6)}{(+)^3}<0$. Convexa.

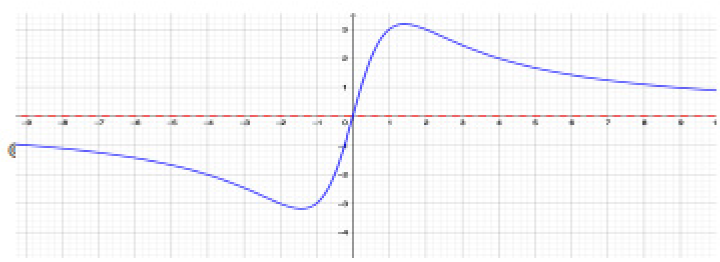
– $\left(-\sqrt{6},0\right)$: $y''(-1)=\dfrac{18(-1)(1-6)}{(+)^3}>0$. Cóncava.

– $\left(0,\sqrt{6}\right)$: $y''(1)=\dfrac{18(1)(1-6)}{(+)^3}<0$. Convexa.

– $\left(\sqrt{6},\infty\right)$: $y''(3)=\dfrac{18(3)(9-6)}{(+)^3}>0$. Cóncava.

Puntos de inflexión en $x=0, x=\pm\sqrt{6}$. $y(0)=0$. Punto $(0,0)$. $y\left(\pm\sqrt{6}\right)=\dfrac{\pm 9\sqrt{6}}{6+2}=\dfrac{\pm 9\sqrt{6}}{8}$.

Puntos $\left(\pm\sqrt{6},\pm\dfrac{9\sqrt{6}}{8}\right)$.



40. Calcula el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos, y efectúa un dibujo aproximado de las funciones: **a)** $y=\dfrac{x^4-3}{x}$ **b)** $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ **c)** $y=x^3e^{-x}$

Solución:

a) $y=\dfrac{x^4-3}{x}$

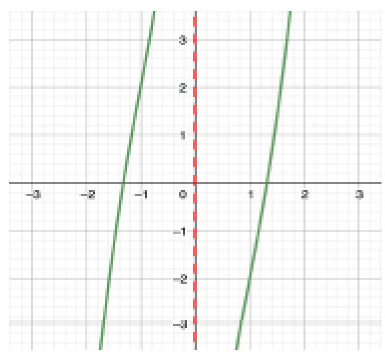
- **Dominio:** $\mathbb{R}-\{0\}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  – Eje Y $(x=0)$: No hay.
  – Eje X $(y=0)$: $x^4-3=0 \Rightarrow x^4=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{3}$. Puntos $\left(\pm\sqrt[4]{3},0\right)$.
- **Simetrías:** $f(-x)=\dfrac{(-x)^4-3}{-x}=\dfrac{x^4-3}{-x}=-f(x)$. Es impar, simétrica respecto al origen.

- **Asíntotas:**
  - Vertical: $x = 0$. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 - 3}{x} = -\infty$. $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^4 - 3}{x} = \infty$.
  - Horizontal: No hay. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 3}{x} = \pm\infty$.
  - Oblicua: $y = x^3 - \frac{3}{x}$. No tiene asíntota oblicua (grado del numerador es 3 unidades mayor que el denominador).

- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:** $y = x^3 - 3x^{-1}$.

  $y' = 3x^2 + 3x^{-2} = 3x^2 + \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2}$. Puntos críticos: $3x^4 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^4 = -3 \Rightarrow x^4 = -1$.

  No hay soluciones reales. Como $y' > 0$ para todo x en el dominio, la función es siempre creciente. No hay extremos relativos.



b) $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x = 0)$: $y = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$. Punto $(0, -1)$.
  - Eje X $(y = 0)$: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- **Simetrías:** No es par ni impar.
- **Asíntotas:**
  - Vertical: $x = 1$. $\lim_{x \to 1} \frac{2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$.
  - Horizontal: $y = 0$. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 1}{(x-1)^2} = 0$.

- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:**

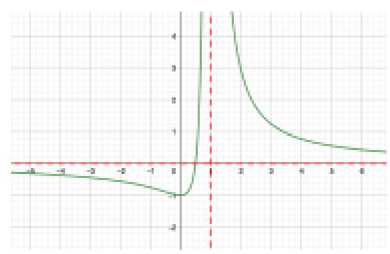
  $y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$. Puntos críticos: $-2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

  – $(-\infty,0)$: $y'(-1) = \frac{2}{(-2)^3} < 0$. Decreciente.

  – $(0,1)$: $y'(0.5) = \frac{-1}{(-0.5)^3} > 0$. Creciente.

  – $(1,\infty)$: $y'(2) = \frac{-4}{1^3} < 0$. Decreciente.

  Mínimo relativo en $x = 0$: $y(0) = -1$. Punto $(0,-1)$. No hay máximo relativo.



c) $y = x^3e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  – Eje Y $(x = 0)$: $y = 0$. Punto $(0,0)$.
  – Eje X $(y = 0)$: $x^3e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$. Punto $(0,0)$.
- **Simetrías:** No es par ni impar.
- **Asíntotas:**
  – Vertical: No hay.
  – Horizontal: $\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ (exponencial crece más rápido que polinomio). Asíntota $y = 0$ para $x \to \infty$. $\lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = (-\infty)^3 e^{\infty} = -\infty\cdot\infty = -\infty$.
- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:** $y' = 3x^2e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = x^2e^{-x}(3-x)$

  .

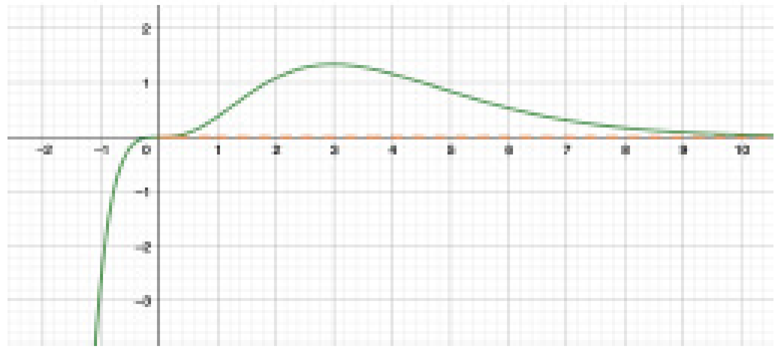
  Puntos críticos: $x^2e^{-x}(3-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$.

  – $(-\infty,0)$: $y'(-1) = (-1)^2 e^1(3-(-1)) = e(4) > 0$. Creciente.

  – $(0,3)$: $y'(1) = 1^2e^{-1}(3-1) = 2e^{-1} > 0$. Creciente.

  – $(3,\infty)$: $y'(4) = 4^2e^{-4}(3-4) = 16e^{-4}(-1) < 0$. Decreciente.

No hay extremo relativo en $x = 0$ (la función sigue siendo creciente). Máximo relativo en $x = 3$: $y(3) = 3^3 e^{-3} = 27e^{-3}$. Punto $(3, 27e^{-3})$.



41. Calcula el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos, y efectúa un dibujo aproximado de las funciones: **a)** $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ **b)** $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$ **c)** $y = \frac{1}{e^x - 1}$

Solución:

a) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

- **Dominio**. La función $f(x)$ es racional y está definida para todos los números reales excepto en $x = 0$.

  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, entonces $\nexists y$. Y si $y = 0$, entonces $\nexists x$. Por tanto, la función no corta a los ejes.

- **Asíntotas.**

  Asíntotas verticales. $\lim_{x \to 0^+} x^3 + \frac{1}{x^2} = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} x^3 + \frac{1}{x^2} = 0 + \frac{1}{0^-} = -\infty$.

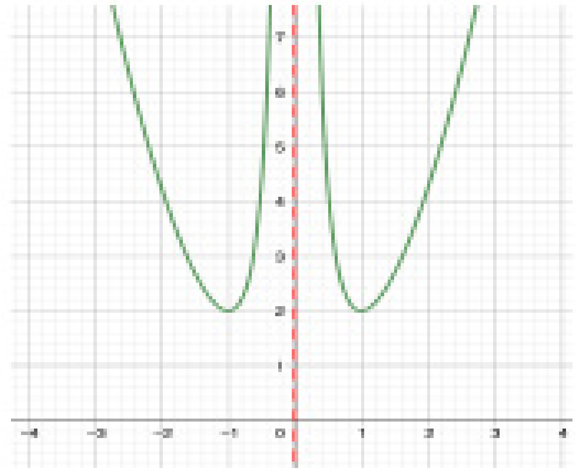
  Asíntota vertical en $x = 0$.

  A la izquierda de la asíntota $x = 0$. La curva tiende hacia $+\infty$ y a la derecha hacia $-\infty$.

  Asíntotas horizontales. $\lim_{x \to \infty} x^3 + \frac{1}{x^2} = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} x^3 + \frac{1}{x^2} = +\infty$. No hay asíntotas horizontales.

- **Crecimiento y decrecimiento y extremos relativ**os. $f'(x) = 2x + \frac{-2x}{x^4} = 2x - \frac{2}{x^3}$, está definida en su dominio. $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0$, para $x = -1$ y $x = 1$ que son los dos puntos críticos.

Tiene dos mínimos relativos en los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 2)$.



b) $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$

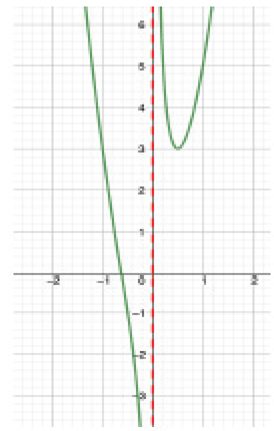
- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x = 0)$: No hay.
  - Eje X $(y = 0)$: $4x^2 + \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{4x^3 + 1}{x} = 0 \Rightarrow 4x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.

    Punto $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}, 0\right)$.
- **Simetrías:** No es par ni impar.
- **Asíntotas:**
  - Vertical: $x = 0$. $\lim_{x\to 0^+}\left(4x^2 + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$. $\lim_{x\to 0^-}\left(4x^2 + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.
  - Horizontal: No hay. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(4x^2 + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$.
- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:** $y' = 8x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{8x^3 - 1}{x^2}$.

  Puntos críticos: $8x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

  - $(-\infty, 0)$: $y'(-1) = \dfrac{-8-1}{1} = -9 < 0$. Decreciente.
  - $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$: $y'(0.1) = \dfrac{0.008 - 1}{0.01} < 0$. Decreciente.
  - $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$: $y'(1) = \dfrac{8-1}{1} = 7 > 0$. Creciente.

  Mínimo relativo en $x = \dfrac{1}{2}$: $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\dfrac{1}{4}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$. Punto $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$.



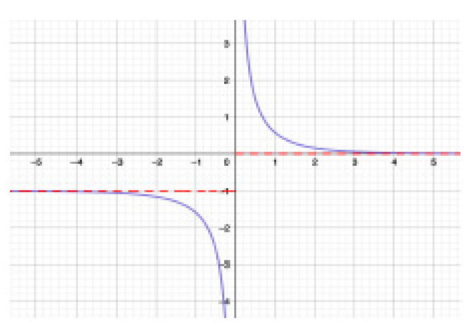
c) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

- **Dominio:** $e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$. Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- **Puntos de corte con los ejes:**
  - Eje Y $(x = 0)$: No hay.
  - Eje X $(y = 0)$: No hay (numerador es 1).
- **Simetrías:** No es par ni impar.
- **Asíntotas:**
  - Vertical: $x = 0$. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.
  - Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. Asíntota $y = 0$ para $x \to \infty$.

  $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0 - 1} = -1$. Asíntota $y = -1$ para $x \to -\infty$.

- **Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:** $y' = -\dfrac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$. Puntos críticos:

  No hay (e^x nunca es cero). Como $e^x > 0$ y $\left(e^x - 1\right)^2 > 0$ (para $x \neq 0$), entonces $y' < 0$ para todo x en el dominio. La función es siempre decreciente. No hay extremos relativos.



42. Calcula los elementos necesarios para dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ **b)** $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **c)** $y = \cos x - \cos^2 x$

d) $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$ **e)** $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$ **f)** $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

Solución:

a) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$

Dominio. La función f(x) contiene un radical de índice par y está definida solo para los números reales que hacen el radicando mayor o igual que cero.

$x^3 - 3x \geq 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 3\right) \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$

Luego, $D(f) = \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$

- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Mientras que $y = 0$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$ y $x_3 = \sqrt{3}$. Los puntos de corte son: $(0,0)$, $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}, 0\right)$.

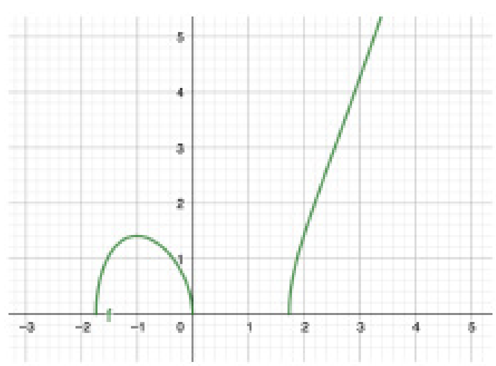
- **Asíntotas.** No tiene asíntotas.

- **Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.**

$$y = \sqrt{x^3 - 3x} = \left(x^3 - 3x\right)^{1/2}$$

$y' = \dfrac{1}{2}\left(x^3 - 3x\right)^{-1/2} \cdot \left(3x^2 - 3\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - 3x}}$ definida en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

$y' = 0 \Rightarrow \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - 3x}} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0,$ para $x = -1$ y $x = 1$. Pero solo $x = -1$ es punto crítico, ya que $x = 1$ no pertenece al dominio de la función.



b) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

- **Dominio.** La función $f(x)$ es racional, logarítmica y con radicales. $D(f) = (0, +\infty)$

- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, entonces $\not{y}$. Y si $y = 0$, entonces $hx = 0$, para $x = 1$. Por tanto, la función corta a los ejes en el punto $P(1,0)$.

- **Asíntotas.**

  Asintotas verticales. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$. Asintota vertical en $x = 0$.

  Asintotas horizontales. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, porque es una indeterminación de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ donde el denominador crece más deprisa que el numerador.

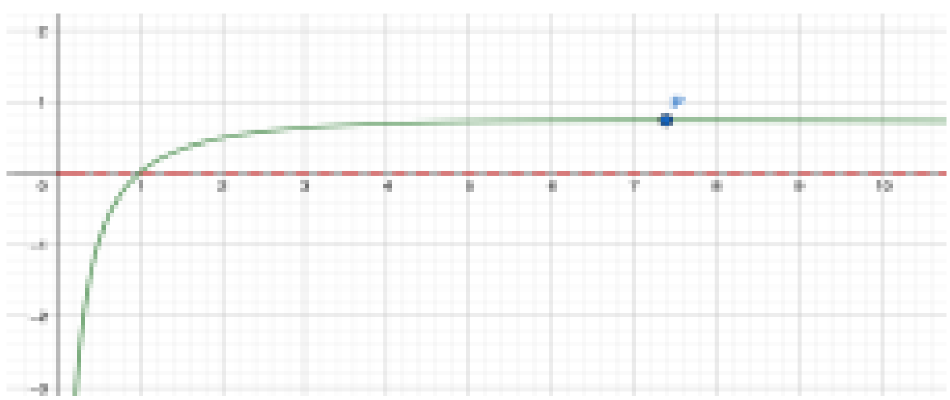
  Asintota horizontal por la derecha en $y = 0$.

- **Crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.**

  $y' = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^3} = \dfrac{2-\ln x}{2x^3\sqrt{x}}$ definida en su dominio

  $y' = 0 \Rightarrow \dfrac{2-\ln x}{2x^3\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$, para $x = e^2$ que es un punto crítico. Tiene un máximo relativo en el punto $P\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$, es creciente en $\left(0, e^2\right)$ y decreciente en $\left(e^2, +\infty\right)$.

- La gráfica de esta función es:



c) $y = \cos x - \cos^2 x$

- **Dominio.** $D(f) = \mathbb{R}$

- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Y si $f(x) = 0$, entonces

  $\cos x - \cos^2 x = \cos x\left(1 - \cos x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y $x = k\pi$.

- **Simetrías.** $f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos x - \cos^2 x = f(x)$. Luego es simétrica respecto del eje de ordenadas.

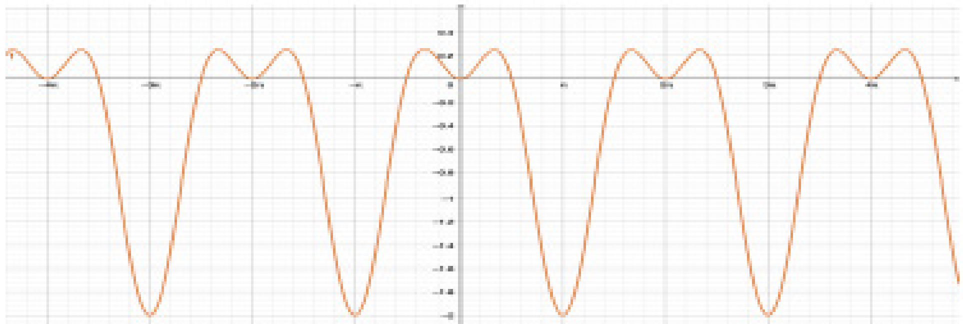
- **Periodicidad.** $f(x + 2\pi) = f(x)$. Es periódica de período 2π.

  Estudiaremos sus elementos característicos en el intervalo $\left[0, 2\pi\right]$.

- **Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.**

  $y' = -\sin x - 2\cos x \cdot (-\sin x) = \sin x\left(-1 + 2\cos x\right)$

$$y' = 0 \Rightarrow \sin x(-1 + 2\cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \text{ si } x = 0 \text{ y } x = \pi \\ \cos x = \dfrac{1}{2}, \text{ si } x = \dfrac{\pi}{3} \text{ y } x = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$$ que son puntos críticos.



d) $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$

- **Dominio.** La función $f(x)$ es racional y con un radical de índice par y está definida solo para los números reales que hacen el denominador nulo y el radicando mayor o igual que cero, es decir,

  $4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, 2)$.

  Luego, $D(f) = (-2, 2)$

- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, entonces $y = 2$. Mientras que si $y = 0$, $\dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$. El único punto de corte es $P(0, 2)$.

- **Asíntotas.**

  Asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -2^+} \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4}{0^+} = +\infty, \lim_{x \to 2^-} \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

  Luego, hay asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 2$. Asintotas horizontales. No hay asíntotas horizontales.

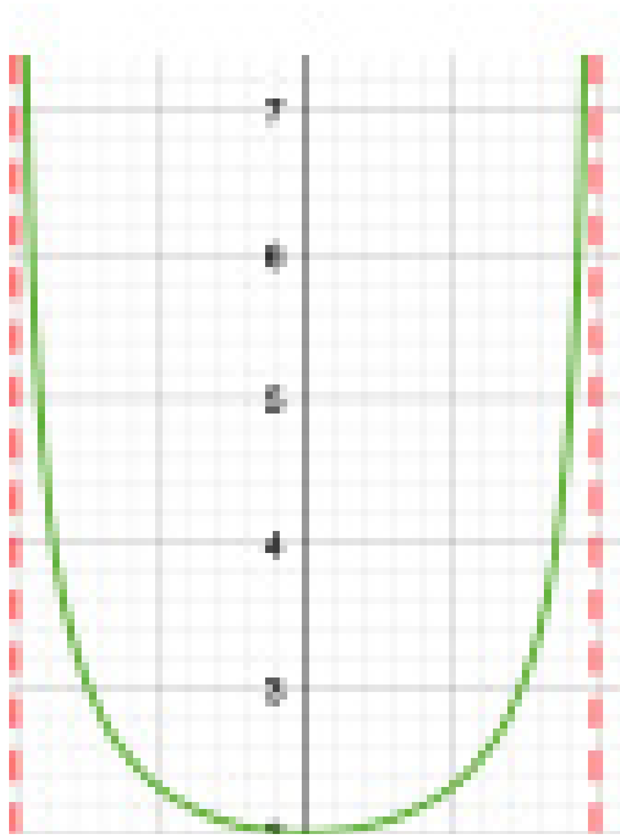
- **Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.**

  $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}} = 4(4 - x^2)^{-1/2}$

  $y' = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)(4 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \dfrac{4x}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$

  que está definida en su dominio.

  $y' = 0 \cdot \dfrac{4x}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} = 0 \cdot 4x = 0$, para $x = 0$ que es el punto crítico



e) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

- **Dominio.** La función $f(x)$ es racional y logarítmica. $D(f) = (0, +\infty)$
- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x = 0$, entonces $f(0)$. Y si $y = 0$, entonces $x^2 + \ln x = 0$, que da lugar a un punto que nos es sencillo su cálculo. Por tanto, la función corta al eje OX en un punto.
- **Asíntotas.**

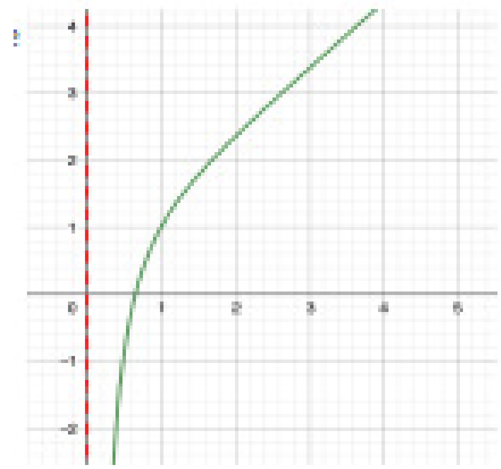
  Asintotas verticales. $\lim_{x \to 0^+} \left(x + \dfrac{\ln x}{x} \right) = 0 + \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

  Asintota vertical en $x = 0$. Asintotas horizontales. $\lim_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{\ln x}{x} \right) = +\infty + 0 = +\infty$,

  porque $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ es una determinación de la forma $\left(\dfrac{\infty}{\infty} \right)$ donde el denominador crece más deprisa que el numerador y el cociente tiende a 0. No hay asíntotas horizontales.
- **Crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.**

  $y' = 1 + \dfrac{1}{x} \cdot x - \ln x \dfrac{1}{x^2} = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ está definida en su dominio

  $y' > 0, \forall x \in D(f)$. Luego y es siempre creciente.



f) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

- **Dominio.**

  La función $f(x)$ tiene dos radicales de índice impar. Por tanto,

  $\begin{cases} x\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\leq 4$

  $D(f)=[0,4]$

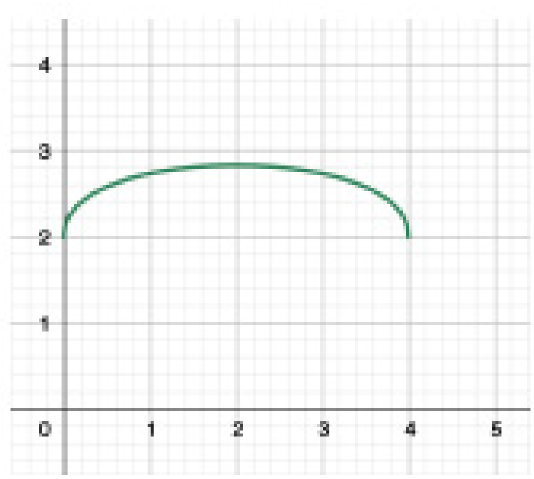
- **Puntos de corte con los ejes.** Si $x=0$, entonces $y=2$. Y si $y=0$, entonces $\nexists x$. La función corta a los ejes solo en el punto $P(0,2)$.

- **Asíntotas.** No hay asíntotas.

- **Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.**

  $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$ que está definida en $(0,4)$.

  $y'=0\Rightarrow \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}=0\Rightarrow \sqrt{4-x}-\sqrt{x}=0\Rightarrow 4-x=x,$ para $x=2$ que es un punto crítico.



13. Problemas de optimización

43. Construcción de un parterre. Un jardinero quiere construir un parterre con forma de sector circular y con un perímetro de 100 m. ¿Cuál debe ser el radio del parterre para que la superficie sea máxima?

Solución: Sea r el radio del sector circular y L la longitud del arco. El perímetro del sector circular es $P = 2r + L$. Dado $P = 100\text{m}$, tenemos $100 = 2r + L \Rightarrow L = 100 - 2r$. La superficie del sector circular es $A = \frac{1}{2}rL$. Sustituimos L: $A(r) = \frac{1}{2}r(100 - 2r) = 50r - r^2$.

Para que el radio sea válido, $r > 0$. Además, $L > 0 \Rightarrow 100 - 2r > 0 \Rightarrow 100 > 2r \Rightarrow r < 50$. Así, el dominio de $A(r)$ es $(0, 50)$.

Para maximizar la superficie, calculamos la derivada de $A(r)$ e igualamos a cero: $A'(r) = 50 - 2r$. $50 - 2r = 0 \Rightarrow 2r = 50 \Rightarrow r = 25$.

Verificamos que es un máximo con la segunda derivada: $A''(r) = -2$. Como $A''(r) = -2 < 0$, el punto crítico $r = 25$ corresponde a un máximo. Dado que es el único extremo en el dominio, es el máximo absoluto.

El radio del parterre debe ser 25m para que la superficie sea máxima. La longitud del arco sería $L = 100 - 2(25) = 50\text{m}$. La superficie máxima sería $A(25) = 50(25) - (25)^2 = 1250 - 625 = 625\text{m}^2$.

44. De todos los rectángulos de área dada, A, encuentra las dimensiones del que tenga perímetro mínimo.

Solución: Sean x e y las dimensiones del rectángulo. El área dada es $A = xy$. De aquí, $y = \frac{A}{x}$. El perímetro del rectángulo es $P = 2x + 2y$. Sustituimos y: $P(x) = 2x + 2\left(\frac{A}{x}\right) = 2x + 2Ax^{-1}$.

Para que las dimensiones sean válidas, $x > 0$.

Para minimizar el perímetro, calculamos la derivada de $P(x)$ e igualamos a cero: $P'(x) = 2 - 2Ax^{-2} = 2 - \frac{2A}{x^2}$. $2 - \frac{2A}{x^2} = 0$ $2 = \frac{2A}{x^2}$ $x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{A}$ (ya que $x > 0$).

Verificamos que es un mínimo con la segunda derivada: $P''(x) = -2A(-2)x^{-3} = 4Ax^{-3} = \frac{4A}{x^3}$.

Evaluamos $P''(x)$ en $x = \sqrt{A}$: $P''\left(\sqrt{A}\right) = \frac{4A}{\left(\sqrt{A}\right)^3} = \frac{4A}{A\sqrt{A}} = \frac{4}{\sqrt{A}}$. Como $A > 0$, $P''\left(\sqrt{A}\right) > 0$, lo que confirma que es un mínimo.

Las dimensiones del rectángulo son $x = \sqrt{A}$. Calculamos y: $y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$. Por lo tanto, el rectángulo con perímetro mínimo para un área dada es un cuadrado de lado $\sqrt{A}$.

45. Divide el número 20 en dos sumandos, de forma que, su producto sea el mayor posible.

Solución: Sean los dos sumandos x e y. La suma es $x+y=20 \Rightarrow y=20-x$. El producto es $P=xy$. Sustituimos y: $P(x)=x(20-x)=20x-x^2$.

Para que los sumandos sean válidos, podemos considerar $x \in [0,20]$.

Para maximizar el producto, calculamos la derivada de $P(x)$ e igualamos a cero: $P'(x)=20-2x$. $20-2x=0 \Rightarrow 2x=20 \Rightarrow x=10$.

Verificamos que es un máximo con la segunda derivada: $P''(x)=-2$. Como $P''(x)=-2<0$, el punto crítico $x=10$ corresponde a un máximo. Dado que es el único extremo en el intervalo abierto $(0,20)$ y la función es una parábola que abre hacia abajo, es el máximo absoluto.

Si $x=10$, entonces $y=20-10=10$. Los dos sumandos deben ser 10 y 10. El producto máximo es $P(10)=10\cdot 10=100$.

46. ¿Qué número positivo sumado con su inverso da una suma mínima?

Solución: Sea el número positivo x. Su inverso es $\frac{1}{x}$. La suma es $S(x)=x+\frac{1}{x}$. El dominio de la función es $x>0$.

1. Calculamos la primera derivada: $S'(x)=1-\frac{1}{x^2}$. 2. Encontramos los puntos críticos igualando $S'(x)$ a cero: $1-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2=1$. Como $x>0$, la única solución es $x=1$. 3. Calculamos la segunda derivada para verificar si es un mínimo: $S''(x)=\frac{2}{x^3}$. 4. Evaluamos $S''(x)$ en el punto crítico $x=1$: $S''(1)=\frac{2}{1^3}=2$. Como $S''(1)=2>0$, el punto crítico $x=1$ corresponde a un mínimo relativo.

Dado que es el único extremo relativo en el dominio $(0,\infty)$ y la función tiende a infinito en los límites del dominio ($\lim_{x\to 0^+} S(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} S(x)=\infty$), este mínimo relativo es también el mínimo absoluto.

El número positivo que sumado con su inverso da una suma mínima es $x=1$. La suma mínima es $S(1)=1+\frac{1}{1}=2$.

47. Determina las dimensiones del triángulo rectángulo de mayor área sabiendo que tiene un perímetro igual a 16 cm.

Solución:

Sea el triángulo rectángulo con catetos x e y, y la hipotenusa h. El perímetro es $P = x + y + h = 16$. El área es $A = \frac{1}{2}xy$. Por el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = h^2$.

De la ecuación del perímetro, $h = 16 - x - y$. Sustituyendo h en el teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = (16 - x - y)^2$ $x^2 + y^2 = 256 + x^2 + y^2 - 32x - 32y + 2xy$; $0 = 256 - 32x - 32y + 2xy$ Dividiendo por 2: $16x + 16y - xy = 128$ Despejando y: $y(16 - x) = 128 - 16x$; $y = \dfrac{128 - 16x}{16 - x} = \dfrac{16(8 - x)}{16 - x}$

El dominio para x es $(0,8)$, ya que $x > 0$ y $y > 0$. Sustituyendo y en la fórmula del área:

$$A(x) = \frac{1}{2}x\left(\frac{16(8 - x)}{16 - x}\right) = \frac{8x(8 - x)}{16 - x} = \frac{64x - 8x^2}{16 - x}$$

Calculamos la derivada de $A(x)$: $A'(x) = \dfrac{(64 - 16x)(16 - x) - (64x - 8x^2)(-1)}{(16 - x)^2}$

$$A'(x) = \frac{1024 - 64x - 256x + 16x^2 + 64x - 8x^2}{(16 - x)^2} \quad A'(x) = \frac{8x^2 - 256x + 1024}{(16 - x)^2}$$

Igualamos $A'(x) = 0$: $8x^2 - 256x + 1024 = 0$ $x^2 - 32x + 128 = 0$ Usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(1)(128)}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 512}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{512}}{2} = \frac{32 \pm 16\sqrt{2}}{2} = 16 \pm 8\sqrt{2}$$

Los posibles valores para x son $x_1 = 16 - 8\sqrt{2} \approx 4.688$ y $x_2 = 16 + 8\sqrt{2} \approx 27.312$. Dado que $x \in (0,8)$, el único valor válido es $x = 16 - 8\sqrt{2}$. Para este valor de x, calculamos y:

$$y = \frac{16\left(8 - \left(16 - 8\sqrt{2}\right)\right)}{16 - \left(16 - 8\sqrt{2}\right)} = \frac{16\left(-8 + 8\sqrt{2}\right)}{8\sqrt{2}} = \frac{16 \cdot 8\left(\sqrt{2} - 1\right)}{8\sqrt{2}} = \frac{16\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2}} = 16 - 8\sqrt{2}.$$ Así, $x = y = 16 - 8\sqrt{2}$.

La hipotenusa $h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\left(16 - 8\sqrt{2}\right)^2} = \left(16 - 8\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 16\sqrt{2} - 16$. Las dimensiones del triángulo rectángulo de mayor área son $x = 16 - 8\sqrt{2}$ cm y $y = 16 - 8\sqrt{2}$ cm.

48. Aplica la regla de L'Hopital para hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ **b)** $\lim_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ **c)** $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$ **d)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Solución:

a) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ Al sustituir $x = -2$, obtenemos $\dfrac{(-2)^3 + 8}{-2 + 2} = \dfrac{-8 + 8}{0} = \dfrac{0}{0}$, una indeterminación.

Aplicamos la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to-2}\dfrac{\frac{d}{dx}\left(x^3+8\right)}{\frac{d}{dx}\left(x+2\right)}=\lim_{x\to-2}\dfrac{3x^2}{1}=3\left(-2\right)^2=3\left(4\right)=12.$

b) $\lim_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ Al sustituir $x=4$, obtenemos $\dfrac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\dfrac{0}{2-2}=\dfrac{0}{0}$, una indeterminación.

Aplicamos la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to4}\dfrac{\frac{d}{dx}\left(x-4\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\lim_{x\to4}\dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to4}2\sqrt{x}=2\sqrt{4}=2\left(2\right)=4.$

c) $\lim_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ Al sustituir $x=1$, obtenemos $\dfrac{\ln 1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$, una indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to1}\dfrac{\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x-1\right)}=\lim_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1.$

d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ Al sustituir $x\to+\infty$, obtenemos $\dfrac{\ln\left(+\infty\right)}{+\infty}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$, una indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

49. Utiliza el método más sencillo para calcula estos límites. En el caso de que no se pueda aplicar la regla de L'Hopital, explica la razón.

a) $\lim_{x\to0}\dfrac{tg2x}{senx}$ **b)** $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2+1}$ **c)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}$

Solución:

a) $\lim_{x\to0}\dfrac{tg2x}{senx}$ Al sustituir $x=0$, obtenemos $\dfrac{tg\left(0\right)}{sen\left(0\right)}=\dfrac{0}{0}$, una indeterminación. Método más sencillo (sin L'Hopital): Usar límites notables $\lim_{u\to0}\dfrac{tgu}{u}=1$ y $\lim_{u\to0}\dfrac{senu}{u}=1$

. $\lim_{x\to0}\dfrac{tg2x}{senx}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{tg2x}{2x}\cdot2x}{\frac{senx}{x}\cdot x}=\lim_{x\to0}\dfrac{1\cdot2x}{1\cdot x}=\lim_{x\to0}2=2.$ (También se podría aplicar L'Hopital: $\lim_{x\to0}\dfrac{2sec^2 2x}{cosx}=\dfrac{2\left(1\right)^2}{1}=2$).

b) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2+1}$ Al sustituir $x=1$, obtenemos $\dfrac{1^3+2\left(1\right)^2-1}{1^2+1}=\dfrac{1+2-1}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1.$ No es una indeterminación, por lo que no es necesario aplicar L'Hopital ni otros métodos complejos. El método más sencillo es la sustitución directa.

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2}$ Al sustituir $x \to +\infty$, obtenemos $\frac{e^{+\infty}-1}{(+\infty)^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, una indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x-1)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x}$ Al sustituir $x \to +\infty$ de nuevo, obtenemos $\frac{e^{+\infty}}{2(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty}$, otra indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hopital otra vez: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$. El método más sencillo es L'Hopital repetidamente, ya que la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio.

Recta tangente y técnicas de derivación

1. El espacio, en metros, recorrido por un objeto viene dado por $f(t)=\frac{t^2}{2}+2t+1$, donde t es el tiempo en segundos.
   a) Calcula la velocidad media en los intervalos $[1,3]$, $[1,2]$, $[1,1.5]$ y $[1,1.1]$.
   b) Halla la velocidad en el instante $t=1$.

Solución:

La función de posición es $f(t)=\frac{1}{2}t^2+2t+1$. La velocidad instantánea es la derivada de la posición: $v(t)=f'(t)=t+2$.

a) La velocidad media (VM) en un intervalo $[a,b]$ se calcula como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$f(1)=\frac{1}{2}(1)^2+2(1)+1=0.5+2+1=3.5.$

$f(1.1)=\frac{1}{2}(1.1)^2+2(1.1)+1=0.5(1.21)+2.2+1=0.605+2.2+1=3.805.$

$f(1.5)=\frac{1}{2}(1.5)^2+2(1.5)+1=0.5(2.25)+3+1=1.125+3+1=5.125.$

$f(2)=\frac{1}{2}(2)^2+2(2)+1=0.5(4)+4+1=2+4+1=7.$

$f(3)=\frac{1}{2}(3)^2+2(3)+1=0.5(9)+6+1=4.5+6+1=11.5.$

Intervalo $[1,3]$: $=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{11.5-3.5}{2}=\frac{8}{2}=4$ m/s.

Intervalo $[1,2]$: $=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{7-3.5}{1}=3.5$ m/s.

Intervalo $[1,1.5]$: $=\frac{f(1.5)-f(1)}{1.5-1}=\frac{5.125-3.5}{0.5}=\frac{1.625}{0.5}=3.25$ m/s.

Intervalo $[1,1.1]$: $=\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{3.805-3.5}{0.1}=\frac{0.305}{0.1}=3.05$ m/s.

b) La velocidad en el instante $t=1$ es $v(1)=f'(1)=1+2=3$ m/s.

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-\frac{7}{x}$ **b)** $f(x)=x^2-2\sqrt{x}$ **c)** $f(x)=(2-5x)(2x^2+4x)$

d) $f(x)=\frac{2-5x}{x^2-2}$ **e)** $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+2}$ **f)** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+2}$

g) $f(x)=\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^2}+1$ **h)** $f(x)=\left(\frac{2}{x-2}\right)^4$ **i)** $f(x)=\sqrt[3]{5x-2x^2}$

j) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

Solución:

a) $f(x)=x^2-7x^{-1}\, f'(x)=2x-7(-1)x^{-2}=2x+\dfrac{7}{x^2}.$

b) $f(x)=x^2-2x^{1/2}\, f'(x)=2x-2\left(\dfrac{1}{2}\right)x^{-1/2}=2x-x^{-1/2}=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

c) $f(x)=(2-5x)(2x^2+4x)\, f'(x)=(-5)(2x^2+4x)+(2-5x)(4x+4)$

$f'(x)=-10x^2-20x+(8x+8-20x^2-20x)\, f'(x)=-10x^2-20x-20x^2-12x+8=-30x^2-32x+8.$

d) $f(x)=\dfrac{2-5x}{x^2-2}\, f'(x)=\dfrac{(-5)(x^2+2)-(2-5x)(2x)}{(x^2-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-5x^2-10-(4x-10x^2)}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-5x^2-10-4x+10x^2}{(x^2-2)^2}=\dfrac{5x^2-4x-10}{(x^2-2)^2}.$

e) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+2}\, f'(x)=\dfrac{(6x^2)(x^2+2)-(2x^3)(2x)}{(x^2+2)^2}\, f'(x)=\dfrac{6x^4+12x^2-4x^4}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2x^4+12x^2}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2x^2(x^2+6)}{(x^2+2)^2}.$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+2}\, f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2+2)-(\sqrt{x})(2x)}{(x^2+2)^2}\, f'(x)=\dfrac{2-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+2)^2}.$

g) $f(x)=\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}+1\, f'(x)=-6x^{-3}$

h) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x-2}\right)^4 f'(x)=-\dfrac{64}{(x-2)^5}.$

i) $f(x)=(5x-2x^2)^{1/3}\, f'(x)=\dfrac{1}{2}(5x-2x^2)^{-2/3}(5-4x)=\dfrac{5-4x}{3\sqrt[3]{5x-2x^2}}.$

j) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\, f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{2}{(2-x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\cdot(2-x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot(2-x)^{3/2}}$

3. Calcula la derivada de estas funciones exponenciales o logarítmicas:

a) $f(x)=e^{-5x}+x$ **b)** $f(x)=3^{2x}$ **c)** $f(x)=x^2e^{2x}$

d) $f(x)=x^2\ln x$ **e)** $f(x)=\ln\sqrt{x}$ **f)** $f(x)=\log_3(2x+1)$

g) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ **h)** $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$

Solución:

a) $f(x)=e^{-5x}+x\, f'(x)=e^{-5x}(-5)+1=-5e^{-5x}+1.$

b) $f(x)=3^{2x}\, f'(x)=3^{2x}\cdot\ln 3\cdot(2)=2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3.$

c) $f(x)=x^2e^{2x}\, f'(x)=(2x)e^{2x}+x^2(e^{2x}\cdot 2)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2xe^{2x}(1+x).$

d) $f(x)=x^2\ln x\ f'(x)=(2x)\ln x+x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1).$

e) $f(x)=\ln\sqrt{x}=\ln\left(x^{1/2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln x\ f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x}.$

f) $f(x)=\log_3(2x+1)\ f'(x)=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}\cdot(2)=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}.$

g) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}\ f'(x)=\dfrac{(2x)(\ln x)-(x^2)\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}=\dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}.$

h) $f(x)=(x^2+1)e^{-x}\ f'(x)=(2x)e^{-x}+(x^2+1)(e^{-x}\cdot(-1))=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2-1)=$
$-e^{-x}(x^2-2x+1)=-e^{-x}(x-1)^2.$

4. Calcula la derivada de estas funciones trigonométricas:

a) $f(x)=\cos(2x-1)$ **b)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$ **c)** $f(x)=x\cos 2x$

d) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$ **e)** $f(x)=e^x\cos 2x$ **f)** $f(x)=\ln\sqrt{\operatorname{sen}x}$

g) $f(x)=\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}$ **h)** $f(x)=x^2-\operatorname{arctg}x$ **i)** $f(x)=\cos x-2x\operatorname{sen}^2 x$

j) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{sen}x}$

a) $f'(x)=-2\sin(2x-1),\ f(x)=-2\operatorname{sen}(2x-1)$

b) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x},\ f'(x)=\dfrac{\cos x(1+\cos x)-\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$
$=\dfrac{1}{1+\cos x}$

c) $f(x)=x\cos 2x,\ f'(x)=1\cdot\cos 2x+x(-2)\operatorname{sen}2x=\cos 2x-2x\operatorname{sen}2x$

d) $f(x)=\operatorname{tg}x=(\operatorname{tg}x)^1,\ f'(x)=2\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}$

e) $f(x)=e^x\cos 2x,\ f'(x)=e^x\cos 2x+e^x(-2\operatorname{sen}2x)=e^x(\cos 2x-2\operatorname{sen}2x)$

f) $f(x)=\ln\sqrt{\operatorname{sen}x}=\ln(\operatorname{sen}x)^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln(\operatorname{sen}x),f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}x$

g) $f(x)=\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x},\ f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$

h) $f(x)=x^2-\operatorname{arctg}x,f'(x)=2x-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{2x^3+2x-1}{1+x^2}$

i) $f(x)=\cos x-2x\operatorname{sen}^2 x,\quad f'(x)=-\operatorname{sen}x-\left(2\operatorname{sen}^2 x+2x\cdot 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x\right)=-\operatorname{sen}x\left(1+2\operatorname{sen}x+4x\cos x\right)$

j) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{sen}x},f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot(1+\operatorname{sen}x)-\operatorname{tg}x\cdot\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)^2}=\dfrac{1+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\cdot\cos^2 x}{(\cos^2 x)(1+\operatorname{sen}x)^2}$

5. Determina si la función $y = e^{2x} - 3e^{-x}$ verifica la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$.

Solución:

Primero, calculamos las derivadas primera y segunda de y: $y = e^{2x} - 3e^{-x}$

$y' = 2e^{2x} - 3\left(-e^{-x}\right) = 2e^{2x} + 3e^{-x}$ $y'' = 2\left(2e^{2x}\right) + 3\left(-e^{-x}\right) = 4e^{2x} - 3e^{-x}$

Ahora, sustituimos en la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$: $\left(4e^{2x} - 3e^{-x}\right) - \left(2e^{2x} + 3e^{-x}\right) - 2\left(e^{2x} - 3e^{-x}\right)$

$= 4e^{2x} - 3e^{-x} - 2e^{2x} - 3e^{-x} - 2e^{2x} + 6e^{-x} = \left(4 - 2 - 2\right)e^{2x} + \left(-3 - 3 + 6\right)e^{-x} = 0e^{2x} + 0e^{-x} = 0$. Sí, la función $y = e^{2x} - 3e^{-x}$ verifica la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$.

6. Determina los puntos de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 4$ en los que la recta tangente pasa por el origen de coordenadas.

$y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 4, \quad y' = x + 4$

Solución:

Sea $P\left(x_0, y_0\right)$ el punto de la parábola en el cual la recta tangente pasa por el origen de coordenadas, es decir, por $O\left(0,0\right)$. Su ecuación es: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$

Como $y_0 = f\left(x_0\right) = \frac{1}{2}x_0^2 + 4x_0 + 4$ y $m = y'\left(x_0\right) = x_0 + 4$, entonces la ecuación de la recta tangente es: $y - \left(\frac{1}{2}x_0^2 + 4x_0 + 4\right) = \left(x_0 + 4\right)\left(x - x_0\right)$

Esta recta tangente debe pasar por el origen $O\left(0,0\right)$, luego:

$0 - \left(\frac{1}{2}x_0^2 + 4x_0 + 4\right) = \left(x_0 + 4\right)\left(0 - x_0\right) \quad -\frac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 - 4 = -x_0^2 - 4x_0 \quad x_0^2 - 8 = 0 \quad x_0 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

Los puntos de tangencia son: $P_1\left(-2\sqrt{2}, 8 - 8\sqrt{2}\right)$ y $P_2\left(2\sqrt{2}, 8 + 8\sqrt{2}\right)$.

7. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 + 2e^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

Sea $f\left(x\right) = x^2 + 2e^x$. Primero, encontramos el punto de tangencia. Para $x = 0$:

$y = f\left(0\right) = \left(0\right)^2 + 2e^0 = 0 + 2\left(1\right) = 2$. El punto de tangencia es $P\left(0,2\right)$.

Ahora, calculamos la pendiente de la recta tangente, que es $f'\left(0\right)$. $f'\left(x\right) = 2x + 2e^x$.

$m_t = f'\left(0\right) = 2\left(0\right) + 2e^0 = 0 + 2\left(1\right) = 2$.

La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = m_t\left(x - x_0\right)$: $y - 2 = 2\left(x - 0\right)$ $y - 2 = 2x$ $y = 2x + 2$.

La pendiente de la recta normal es $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$. La ecuación de la recta normal es

$y - y_0 = m_n\left(x - x_0\right)$: $y - 2 = -\frac{1}{2}\left(x - 0\right)$ $y - 2 = -\frac{1}{2}x$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

8. Determina los coeficientes de la curva $y = ax^3 + bx$ si la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ es: $3x - y - 2 = 0$.

Solución:

$$y = ax^3 + bx \ y' = 3ax^2 + b$$

Si la curva pasa por el punto $P(1,1)$, entonces: $1 = a + b$

Como la recta tangente en el punto $P(1,1)$ es $y = 3x - 2$, entonces la pendiente es $m = 2$ y, por tanto, $y'(1) = 3$. Luego, $3 = 3a + b$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 1 = a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases}$, da como resultado $a = 2$ y $b = -1$.

Por consiguiente, la curva pedida es: $y = 2x^3 - x$

9. alla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

Si $x = 1$, entonces $y = \dfrac{e}{1+1} = \dfrac{e}{2}$

$$y' = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - e^x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x\left(x^2 - 2x + 1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

La pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es: $m = y'(1) = \dfrac{e(1-2+1)}{(1+1)^2} = 0$

Luego, la ecuación de la recta tangente el punto de abscisa $x = 1$ es:

$$y - \frac{e}{2} = 0(x-1) \Rightarrow y = \frac{e}{2} \text{ (recta horizontal)}$$

10. Encuentra todos los puntos de la gráfica de la siguiente función en los que la recta tangente es horizontal: $g(x) = \text{sen}2x - 2\text{sen}x$.

Solución:

Una recta tangente es horizontal cuando su pendiente es 0, es decir, cuando la derivada de la función es 0. $g(x) = \text{sen}2x - 2\text{sen}x$. $g'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x$.

Igualamos $g'(x) = 0$: $2\cos 2x - 2\cos x = 0$ $\cos 2x - \cos x = 0$ Usamos la identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$: $\left(2\cos^2 x - 1\right) - \cos x = 0$ $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Sea $u = \cos x$. La ecuación se convierte en $2u^2 - u - 1 = 0$. Usando la fórmula cuadrática para u: $u = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$. Tenemos dos soluciones para u:
$u_1 = \dfrac{1+3}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$. $u_2 = \dfrac{1-3}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Caso 1: $\cos x = 1$. Esto ocurre para $x = 2k\pi$, donde k es un entero. Para estos valores de x, $g(x) = \text{sen}(2 \cdot 2k\pi) - 2\text{sen}(2k\pi) = \text{sen}(4k\pi) - 2\text{sen}(2k\pi) = 0 - 2(0) = 0$. Los puntos son $(2k\pi, 0)$.

Caso 2: $\cos x = -\frac{1}{2}$. Esto ocurre para $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, donde k es un entero. Para $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$:

$$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Los puntos son $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$: $g\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{4\pi}{3}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$-2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Los puntos son $\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal son $(2k\pi, 0)$, $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y

$\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ para cualquier entero k.

11. Halla la pendiente de la curva $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2} = \frac{9}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}$$

La pendiente de la curva en el punto de abscisa $x = -1$ es: $m = f'(-1) = \frac{9}{10\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{100}$

12. Considera la curva $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un número real. Encuentra para qué valores de a la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ es paralela a la recta $3x + y - 3 = 0$.

Solución:

La recta dada es $3x + y - 3 = 0$, que se puede escribir como $y = -3x + 3$. Su pendiente es $m = -3$. Si la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ es paralela a esta recta, entonces la pendiente

de la tangente debe ser -3. La pendiente de la tangente es $f'(x)$. Primero, calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-a) - x^2(1)}{(x-a)^2} = \frac{2x^2 - 2ax - x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}.$$

Ahora, evaluamos $f'(x)$ en $x = 1$: $f'(1) = \frac{1^2 - 2a(1)}{(1-a)^2} = \frac{1-2a}{(1-a)^2}$.

Igualamos $f'(1)$ a la pendiente de la recta dada: $\frac{1-2a}{(1-a)^2}=-3$. $1-2a=-3(1-a)^2$

$1-2a=-3(1-2a+a^2)$ $1-2a=-3+6a-3a^2$ $3a^2-2a-6a+1+3=0$ $3a^2-8a+4=0$.

Usamos la fórmula cuadrática para a:

$a=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(3)(4)}}{2(3)}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}$. Tenemos dos posibles valores para a: $a_1=\frac{8+4}{6}=\frac{12}{6}=2$. $a_2=\frac{8-4}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Estos valores de a hacen que la recta tangente en $x=1$ sea paralela a la recta $3x+y-3=0$. Debemos asegurarnos de que $x=1$ esté en el dominio de $f(x)$, es decir, $x\neq a$. Para $a=2$, $1\neq 2$. Para $a=2/3$, $1\neq 2/3$. Ambos valores son válidos.

13. Halla la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$, sabiendo que pasa por el punto $(1,3)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución:

$$y=ax^2+bx+c,\quad y'=2ax+b$$

Si pasa por el punto $(1,3)$, entonces: $3=a+b+c$

Si pasa por el origen $(0,0)$, entonces: $0=c$

Como es tangente en el origen $(0,0)$ a la bisectriz del primer cuadrante, $y=x$, entonces $m=1$, por tanto, verifica:

$$y'(0)=1\Rightarrow 1=b$$

Luego, $a=2$ En consecuencia, la ecuación de la parábola buscada es:

$$y=2x^2+x$$

14. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^6-x^5+1$

b) $f(x)=x^5+\frac{3}{x}$

c) $f(x)=(x-1)(2x^2+7)$

d) $f(x)=x^2\left(\frac{1}{x^2}+x^5\right)$

e) $f(x)=5x^2-3\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}$

f) $f(x)=\sqrt[3]{6-x}$

g) $f(x)=\frac{x^2-1}{1+x^2}$

h) $f(x)=\frac{2x}{2x^2-3}$

i) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3-x}}$

j) $f(x)=\sqrt{7x-2x^2}$

Solución:

a) $f(x) = x^6 - x^5 + 1 \, f'(x) = 6x^5 - 5x^4.$

b) $f(x) = x^5 + 3x^{-1} \, f'(x) = 5x^4 - 3x^{-2} = 5x^4 - \dfrac{3}{x^2}.$

c) $f(x) = (x-1)(2x^2+7) \, f'(x) = (1)(2x^2+7) + (x-1)(4x) \, f'(x) = 2x^2 + 7 + 4x^2 - 4x = 6x^2 - 4x + 7.$

d) $f(x) = x^2\left(\dfrac{1}{x^2} + x^5\right) = x^2(x^{-2} + x^5) = 1 + x^7 \, f'(x) = 7x^6$

e) $f(x) = 5x^2 - 3x^{1/2} + 2x^{-2} \, f'(x) = 10x - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)x^{-1/2} + 2(-2)x^{-3} = 10x - \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x^3}.$

f) $f(x) = \sqrt[3]{6-x} \, f'(x) = \dfrac{1}{2}(6-x)^{-2/3}(-1) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(6-x)^2}}.$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{1+x^2} \, f'(x) = \dfrac{(2x)(1+x^2) - (x^2-1)(2x)}{(1+x^2)^2} \, f'(x) = \dfrac{2x + 2x^3 - (2x^3 - 2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x + 2x^3 - 2x^3 + 2x}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}.$

h) $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2-3} \, f'(x) = \dfrac{(2)(2x^2-3) - (2x)(4x)}{(2x^2-3)^2} \, f'(x) = \dfrac{4x^2 - 6 - 8x^2}{(2x^2-3)^2} = \dfrac{-4x^2-6}{(2x^2-3)^2} = -\dfrac{2(2x^2+3)}{(2x^2-3)^2}.$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3-x}} \quad f'(x) = \dfrac{3}{2} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}} \dfrac{1}{(3-x)^2} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}(3-x)^{\frac{3}{2}}} \qquad x \in (0,3).$

j) $f(x) = (7x - 2x^2)^{1/2} \, f'(x) = \dfrac{1}{2}(7x - 2x^2)^{-1/2}(7-4x) = \dfrac{7-4x}{2\sqrt{7x-2x^2}}.$

15. Calcula la derivada de estas funciones exponenciales o logarítmicas:

a) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \log_2(5x-2)$

c) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

d) $f(x) = \ln\sqrt{3x - x^2}$

e) $f(x) = x^2 3^{-x}$

f) $f(x) = \ln(\cos^2 x)$

g) $f(x) = \ln^2(5-x)$

h) $f(x) = \ln(5-x)^2$

Solución:

a) $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \quad f'(x) = 2^x \ln 2$

b) $f(x) = \log_2(5x-2) \quad f'(x) = \dfrac{5}{(5x-2)\ln 2}$

c) $f(x)=x^2e^{-2x}$ $f(x)'=2xe^{-2x}(1-x)$

d) $f(x)=\ln(3x-x^2)$ $f'(x)=\dfrac{3-2x}{3x-x^2}$

e) $f(x)=x^3-e^{-x}$ $f'(x)=x^2e^{-x}(3-x)$

f) $f(x)=\ln(cos^2x)$ $f'(x)=2\dfrac{-sinx}{cosx}=-2tanx$

g) $f(x)=ln^2(5-x)=[\ln(5-x)]^2$ $f'(x)=\dfrac{2\ln(5-x)}{5-x}$

h) $f(x)=\ln(5-x)^2=2\ln(5-x)$ $f'(x)=2\dfrac{-1}{5-x}$

16. Calcula la derivada de estas funciones trigonométricas:

a) $f(x)=\text{senx}+\text{xtgx}$ **b)** $f(x)=x^2\text{cotgx}$ **c)** $f(x)=\text{cosxtgx}$

d) $f(x)=\dfrac{1-\text{tgx}}{1+\text{tgx}}$ **e)** $f(x)=\sec^2x$ **f)** $f(x)=x\cos^2(3x)$

Solución:

a) $f(x)=\text{senx}+\text{xtgx}$ $f'(x)=\cos x+(1)\text{tgx}+x(\sec^2x)=\cos x+\text{tgx}+x\sec^2x.$

b) $f(x)=x^2\text{cotgx}$ $f'(x)=(2x)\text{cotgx}+x^2(-\text{cosec}^2x)=2x\text{cotgx}-x^2\text{cosec}^2x.$

c) $f(x)=\text{cosxtgx}=\cos x\dfrac{\text{senx}}{\cos x}=\text{senx}$ (para $\cos x\neq 0$) $f'(x)=\cos x.$

d) $f(x)=\dfrac{1-\text{tgx}}{1+\text{tgx}}$ $f'(x)=\dfrac{(-\sec^2x)(1+\text{tgx})-(1-\text{tgx})(\sec^2x)}{(1+\text{tgx})^2}$

$f'(x)=\dfrac{-\sec^2x-\sec^2x\text{tgx}-\sec^2x+\sec^2x\text{tgx}}{(1+\text{tgx})^2}=\dfrac{-2\sec^2x}{(1+\text{tgx})^2}.$

e) $f(x)=\sec^2x=(\cos x)^{-2}$ $f'(x)=-2(\cos x)^{-3}(-\text{senx})=\dfrac{2\text{senx}}{\cos^3x}=2\text{tgx}\sec^2x.$

f) $f(x)=x\cos^2(3x)$ $f'(x)=(1)\cos^2(3x)+x(2\cos(3x))(-\text{sen}(3x))(3)$

$f'(x)=\cos^2(3x)-6x\cos(3x)\text{sen}(3x).$

17. Si $f(x)=x^3$, calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, dibuja f, f' y f'' en el mismo sistema de ejes y analiza los resultados.

Solución: $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$ $f''(x)=6x$

Análisis de los resultados:

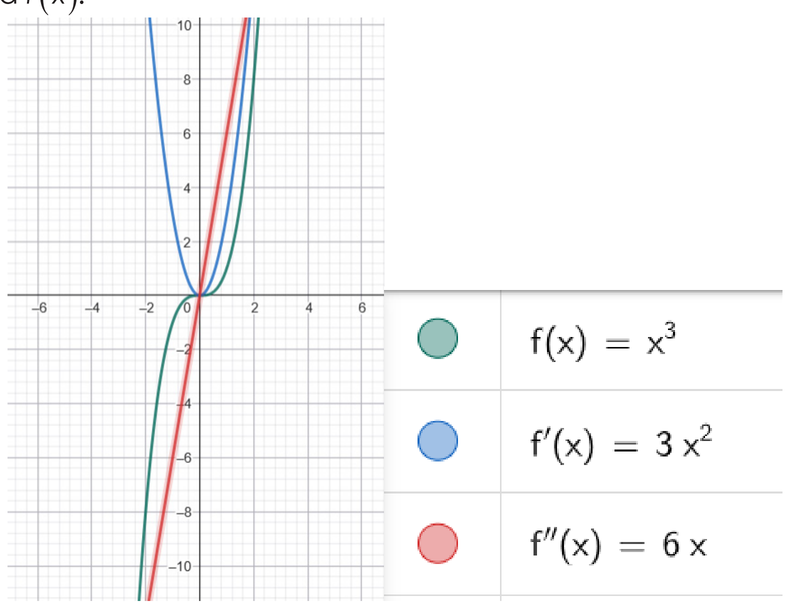
– $f(x)=x^3$: Es una función cúbica, simétrica respecto al origen. Es creciente en todo $\mathbb{R}$. Tiene un punto de inflexión en $x=0$.

– $f'(x)=3x^2$: Es una parábola que se abre hacia arriba, con su vértice en $(0,0)$.

- $f'(x)\geq 0$ para todo x, lo que confirma que $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.
- $f'(x)=0$ en $x=0$, lo que indica un punto crítico. Sin embargo, como $f'(x)$ no cambia de signo, no es un extremo relativo, sino un punto de inflexión con tangente horizontal.

– $f''(x)=6x$: Es una recta que pasa por el origen.

- $f''(x)<0$ para $x<0$, lo que indica que $f(x)$ es cóncava (abierta hacia abajo) en $(-\infty,0)$.
- $f''(x)>0$ para $x>0$, lo que indica que $f(x)$ es convexa (abierta hacia arriba) en $(0,\infty)$.
- $f''(x)=0$ en $x=0$, y cambia de signo, lo que confirma que $x=0$ es un punto de inflexión para $f(x)$.



18. Considera la función $f(x)=e^x-e^{-x}$. Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$.

Solución: $f(x)=e^x-e^{-x}$ $f'(x)=e^x-(-e^{-x})=e^x+e^{-x}$ $f''(x)=e^x+(-e^{-x})=e^x-e^{-x}$ Nótese que $f''(x)=f(x)$.

19. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}}$

b. $g(x)=e^{2x-1}\ln(x+2)$

c. $h(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

d. $i(x)=x\text{arctg}x$

Solución:

a. $f(x)=\frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}}$ $u=-x\Rightarrow u'=-1$ $v=(3x-1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow v'=-\frac{3}{2}(3x-1)^{-\frac{3}{2}}$

$$f'(x)=(-1)(3x-1)^{-\frac{1}{2}}+(-x)(-\frac{3}{2}\left(3x-1)^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{1-\frac{3x}{2}}{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2-3x}{2(3x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

b. $g(x)=e^{2x-1}\ln(x+2)$ $u=e^{2x-1}\Rightarrow u'=e^{2x-1}(2)=2e^{2x-1}$ $v=\ln(x+2)\Rightarrow v'=\frac{1}{x+2}$

$$g'(x)=2e^{2x-1}\ln(x+2)+e^{2x-1}\frac{1}{x+2}=e^{2x-1}\left(2\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right)$$

c. $h(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ $h'(x)=\frac{1}{2}(\frac{x-1}{x+1})^{-\frac{1}{2}}\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^2}$

d. $i(x)=x\text{arctg}x$ $u=x\Rightarrow u'=1$ $v=\text{arctg}x\Rightarrow v'=\frac{1}{1+x^2}$ $i'(x)=1\cdot\text{arctg}x+x\cdot\frac{1}{1+x^2}=\text{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}$

20. Para la función $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$, se pide:

a. Determinar su dominio y su paridad.

b. Calcular los límites siguientes: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

c. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x=1$.

Solución: $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$

a. **Dominio:** Para que $f(x)$ esté definida, el radicando debe ser no negativo: $x^2+3x\geq0$. $x(x+3)\geq0$. Las raíces son $x=0$ y $x=-3$. Analizando los signos:

- Si $x\leq-3$, $x(x+3)\geq0$.
- Si $-3<x<0$, $x(x+3)<0$.
- Si $x\geq0$, $x(x+3)\geq0$.

Por lo tanto, el dominio es $D(f)=(-\infty,-3]\cup[0,\infty)$.

Paridad: Calculamos $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+3(-x)}=\sqrt{x^2-3x}$. Como $f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq-f(x)$, la función no es par ni impar.

b. Límites:

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$ Para $x\to-\infty$, x es negativo, entonces $\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{3}{x}}=-\sqrt{1+0}=-1.$$

- $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$ Es una indeterminación del tipo $\infty-\infty$.

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+3x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}-x}$$

Dividimos numerador y denominador por x. Recordamos que para $x\to-\infty$,

$\sqrt{x^2}=-x$. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}-\frac{x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x}-1}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1}=\frac{3}{-\sqrt{1+0}-1}=\frac{3}{-1-1}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}.$$

c. Ecuación de la recta tangente en $x=1$: Primero, verificamos que $x=1$ está en el dominio: $1^2+3(1)=4\geq 0$. Sí está. Punto de tangencia: $y=f(1)=\sqrt{1^2+3(1)}=\sqrt{4}=2$. El punto es $(1,2)$.

Calculamos la derivada $f'(x)$: $f(x)=\left(x^2+3x\right)^{1/2}$ $f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x\right)^{-1/2}(2x+3)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

Pendiente de la tangente en $x=1$: $m=f'(1)=\frac{2(1)+3}{2\sqrt{1^2+3(1)}}=\frac{5}{2\sqrt{4}}=\frac{5}{2(2)}=\frac{5}{4}$.

Ecuación de la recta tangente: $y-y_0=m(x-x_0)$ $y-2=\frac{5}{4}(x-1)$ $4(y-2)=5(x-1)$
$4y-8=5x-5$ $5x-4y+3=0$.

21. Se considera la función $f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx$. Halla los valores de los parámetros a y b para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=1$ sean horizontales.

Solución: Si las rectas tangentes son horizontales, sus pendientes son cero. Esto significa que $f'(0)=0$ y $f'(1)=0$. La función es $f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx$. Calculamos la derivada: $f'(x)=4x^3+3ax^2+2x+b$.

Aplicamos las condiciones: 1) $f'(0)=0$: $4(0)^3+3a(0)^2+2(0)+b=0\Rightarrow b=0$.
2) $f'(1)=0$: $4(1)^3+3a(1)^2+2(1)+b=0$ $4+3a+2+b=0$ $6+3a+b=0$.
Sustituimos $b=0$ en la segunda ecuación: $6+3a+0=0\Rightarrow 3a=-6\Rightarrow a=-2$.
Los valores de los parámetros son $a=-2$ y $b=0$.

22. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)$ en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=2$. ¿Son estas rectas paralelas? ¿Existe algún punto en la recta tangente a $f(x)$ que tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntralo.

Solución: La función es $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$. Dominio: $x\neq 1$. Los puntos $x=0$ y $x=2$ están en el dominio.

Calculamos la derivada $f'(x)$ usando la regla del cociente: $u=x^2-2x\Rightarrow u'=2x-2$

$$v=x-1\Rightarrow v'=1 f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)(1)}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2-x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-2x+1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}.$$

Recta tangente en $x=0$**:** Punto: $y_0=f(0)=\dfrac{0^2-2(0)}{0-1}=0$. Punto $(0,0)$. Pendiente:

$m_1=f'(0)=\dfrac{0^2-2(0)+2}{(0-1)^2}=\dfrac{2}{1}=2$. Ecuación: $y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x$.

Recta tangente en $x=2$**:** Punto: $y_0=f(2)=\dfrac{2^2-2(2)}{2-1}=\dfrac{4-4}{1}=0$. Punto $(2,0)$. Pendiente:

$m_2=f'(2)=\dfrac{2^2-2(2)+2}{(2-1)^2}=\dfrac{4-4+2}{1^2}=\dfrac{2}{1}=2$. Ecuación: $y-0=2(x-2)\Rightarrow y=2x-4$.

¿**Son estas rectas paralelas**? Sí, ambas rectas tienen la misma pendiente $m_1=2$ y $m_2=2$, por lo tanto, son paralelas.

¿**Existe algún punto en la recta tangente a** $f(x)$ **que tenga pendiente 1**? Buscamos x tal que

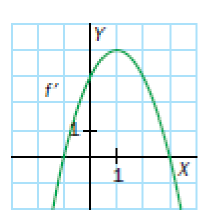
$f'(x)=1$: $\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}=1 x^2-2x+2=(x-1)^2 x^2-2x+2=x^2-2x+1 2=1$ Esta igualdad es falsa, lo que significa que no existe ningún valor de x para el cual la pendiente de la recta tangente sea 1. Por lo tanto, no existe ningún punto en la curva donde la recta tangente tenga pendiente 1.

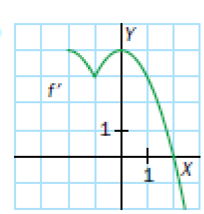
Crecimiento, decrecimiento y extremos

23. Se muestran las gráficas de la función f' derivada de una función f. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento? ¿Hay algún extremo relativo? ¿Es máximo o mínimo?

   a. Gráfica a)

   b. Gráfica b)

a)


b)


Solución: Recordamos que:

- Si $f'(x) > 0$, $f(x)$ es creciente.
- Si $f'(x) < 0$, $f(x)$ es decreciente.
- Si $f'(x)$ cambia de signo de positivo a negativo, hay un máximo relativo.
- Si $f'(x)$ cambia de signo de negativo a positivo, hay un mínimo relativo.

a. Gráfica a) $(f'(x))$:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$. $\Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$.
- $f'(x) < 0$ en $(0, 2)$. $\Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, 2)$.
- En $x = 0$, $f'(x)$ cambia de positivo a negativo. $\Rightarrow f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.
- En $x = 2$, $f'(x)$ cambia de negativo a positivo. $\Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

b. Gráfica b) $(g'(x))$:

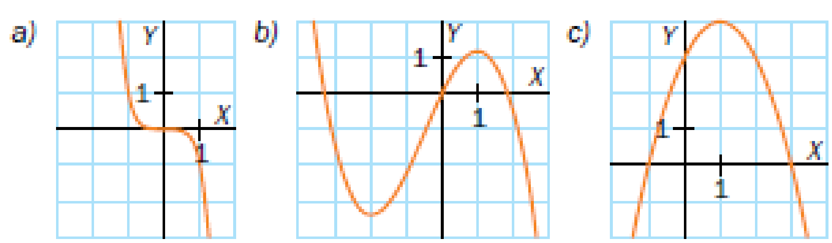
- $g'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. $\Rightarrow g(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.
- $g'(x) = 0$ en $x = 0$. Sin embargo, $g'(x)$ no cambia de signo. $\Rightarrow g(x)$ no tiene extremos relativos en $x = 0$.

24. Dibuja de forma aproximada, a partir de la gráfica de cada función, la gráfica de su función derivada correspondiente.

a. Gráfica a)

b. Gráfica b)

c. Gráfica c)



Solución: Para dibujar la gráfica de la derivada $f'(x)$ a partir de $f(x)$, observamos:

- Donde $f(x)$ es creciente, $f'(x) > 0$.
- Donde $f(x)$ es decreciente, $f'(x) < 0$.
- Donde $f(x)$ tiene un máximo o mínimo relativo (tangente horizontal), $f'(x) = 0$.
- Donde $f(x)$ tiene un punto de inflexión, $f'(x)$ tiene un extremo relativo.

a. Gráfica a) (Parábola $f(x) = x^2$):

- $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.
- $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$.

$\Rightarrow f'(x)$ será negativa en $(-\infty, 0)$, positiva en $(0, \infty)$ y cero en $x = 0$. La gráfica de $f'(x)$ es una línea recta que pasa por el origen con pendiente positiva (como $f'(x) = 2x$).

b. Gráfica b) (Función cúbica $f(x) = x^3$**):**

- $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en $x = 0$.

$\Rightarrow f'(x)$ será positiva en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x = 0$ donde es cero. La gráfica de $f'(x)$ es una parábola que abre hacia arriba, tocando el eje x en el origen (como $f'(x) = 3x^2$).

c. Gráfica c) (Función cúbica con dos extremos $f(x) = x^3 - 3x$**):**

- $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$.
- $f(x)$ es decreciente en $(-1, 1)$.
- $f(x)$ tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

$\Rightarrow f'(x)$ será positiva en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, negativa en $(-1, 1)$ y cero en $x = -1$ y $x = 1$. La gráfica de $f'(x)$ es una parábola que abre hacia arriba, cortando el eje x en $x = -1$ y $x = 1$ (como $f'(x) = 3x^2 - 3$).

25. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b. $f(x) = x^4 - x^2 - 3$

c. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

d. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x,\ x \in (0, 2\pi)$

e. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

f. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

Solución:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Puntos críticos $(f'(x) = 0)$: $3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 2$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $(-\infty, 0)$: Tomamos $x = -1$, $f'(-1) = 3(-1)(-1 - 2) = 9 > 0$. Creciente.
- $(0, 2)$: Tomamos $x = 1$, $f'(1) = 3(1)(1 - 2) = -3 < 0$. Decreciente.

- $(2,\infty)$: Tomamos $x = 3$, $f'(3) = 3(3)(3-2) = 9 > 0$. Creciente.

Extremos relativos:

- En $x = 0$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $(0, f(0)) = (0,4)$.
- En $x = 2$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $(2, f(2)) = (2, 2^3 - 3(2^2) + 4) = (2, 8 - 12 + 4) = (2,0)$.

b. $f(x) = x^4 - x^2 - 3$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$. Puntos críticos $(f'(x) = 0)$:

$2x(2x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Los puntos críticos son $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: Tomamos $x = -1$, $f'(-1) = 2(-1)\left(2(-1)^2 - 1\right) = -2(1) = -2 < 0$. Decreciente.
- $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$: Tomamos $x = -0{,}5$, $f'(-0{,}5) = 2(-0{,}5)(2(0{,}25) - 1) = -1(0{,}5 - 1) = -1(-0{,}5) = 0{,}5 > 0$. Creciente.
- $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: Tomamos $x = 0{,}5$, $f'(0{,}5) = 2(0{,}5)(2(0{,}25) - 1) = 1(0{,}5 - 1) = -0{,}5 < 0$. Decreciente.
- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$: Tomamos $x = 1$, $f'(1) = 2(1)\left(2(1)^2 - 1\right) = 2(1) = 2 > 0$. Creciente.

Extremos relativos:

- En $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{13}{4}\right)$.
- En $x = 0$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $(0, f(0)) = (0, -3)$.
- En $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{13}{4}\right)$.

c. $f(x) = x \cdot e^{-x}$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x) = e^{-x}(1-x)$. Puntos críticos $(f'(x) = 0)$:

$e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$ (ya que $e^x \neq 0$).

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $(-\infty, 1)$: Tomamos $x < 1$, $f'(x) > 0$. Creciente.
- $(1, \infty)$: Tomamos > 1, $f'(x) < 0$. Decreciente.

Extremos relativos:

- En $x=1$, $f'(x)$ cambia de + a -. Màximo relativo en $(1, f(1))=(1, e^{-1})=\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

d. $f(x)=x-2\operatorname{sen}x,\ x\in(0,2\pi)$ Dominio: $(0,2\pi)$. $f'(x)=1-2\cos x$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $1-2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$. En el intervalo $(0,2\pi)$, las soluciones son $x=\frac{\pi}{3}$ y $x=\frac{5\pi}{3}$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$: Tomamos $x=\frac{\pi}{6}$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}<0$. Decreciente.
- $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$: Tomamos $x=\pi$, $f'(\pi)=1-2\cos(\pi)=1-2(-1)=3>0$. Creciente.
- $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$: Tomamos $x=\frac{11\pi}{6}$, $f'\left(\frac{11\pi}{6}\right)=1-2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=1-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}<0$.

  Decreciente.

Extremos relativos:

- En $x=\frac{\pi}{3}$, $f'(x)$ cambia de − a +. Mínimo relativo en
  $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}-2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$.
- En $x=\frac{5\pi}{3}$, $f'(x)$ cambia de + a −. Máximo relativo en
  $\left(\frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}-2\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$.

e. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ Dominio: $x^2-1=0; x=\pm1$. $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $-4x=0; x=0$. Analizamos $f(x)$:

- Si $x<0$, $f'(x)>0$, $g(x)$ es creciente.
- Si $x>0$, .$f'(x)<0$., $g(x)$ es decreciente.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $(-\infty,-1)$: $f^{'(x)}>0$. Creciente.
- $(-1,0)$: $f^{'(x)}>0$. Creciente.
- $(0,1)$: $f'(x)<0$. Decreciente.
- $(1,\infty)$: $f'(x)<0$. Decreciente.

Extremos relativos: En x=0 la derivada cambia de positiva a neatiga, por lo qual hay un máximo $f(0)=\frac{1}{-1}=-1; punto(0,-1)$

f. $f(x)=\ln(1-x^2)$ Dominio: $1-x^2>0\Rightarrow x^2<1\Rightarrow -1<x<1$. $D(f)=(-1,1)$. $f'(x)=\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}=\frac{-2x}{1-x^2}$.

Puntos críticos ($f'(x)=0$): $\frac{-2x}{1-x^2}=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento en $(-1,1)$:

- $(-1,0)$: Tomamos $x=-0{,}5$, $f'(-0{,}5)=\frac{-2(-0{,}5)}{1-(-0{,}5)^2}=\frac{1}{1-0{,}25}=\frac{1}{0{,}75}>0$. Creciente.
- $(0,1)$: Tomamos $x=0{,}5$, $f'(0{,}5)=\frac{-2(0{,}5)}{1-(0{,}5)^2}=\frac{-1}{1-0{,}25}=\frac{-1}{0{,}75}<0$. Decreciente.

Extremos relativos:

- En $x=0$, $f'(x)$ cambia de + a −. Máximo relativo en $(0,f(0))=(0,\ln(1-0^2))=(0,\ln 1)=(0,0)$.

26. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a. $f(x)=2x^3-15x^2+36x-1$

b. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

c. $f(x)=2x^3+3x^2-3$

d. $f(x)=x+2\operatorname{sen}x$

Solución:

a. $f(x)=2x^3-15x^2+36x-1$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=6x^2-30x+36=6(x^2-5x+6)$. Puntos críticos ($f'(x)=0$): $x^2-5x+6=0\Rightarrow (x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2$ o $x=3$.

Intervalos:

- $(-\infty,2)$: Tomamos $x=0$, $f'(0)=6(6)=36>0$. Creciente.
- $(2,3)$: Tomamos $x=2{,}5$, $f'(2{,}5)=6\left((2{,}5)^2-5(2{,}5)+6\right)=6(6{,}25-12{,}5+6)=6(-0{,}25)=-1{,}5<0$. Decreciente.
- $(3,\infty)$: Tomamos $x=4$, $f'(4)=6(4^2-5(4)+6)=6(16-20+6)=6(2)=12>0$. Creciente.

Extremos relativos:

- En $x=2$, $f'(x)$ cambia de + a −. Máximo relativo en $(2,f(2))=\left(2,2(2^3)-15(2^2)+36(2)-1\right)=(2,16-60+72-1)=(2,27)$.
- En $x=3$, $f'(x)$ cambia de − a +. Mínimo relativo en $(3,f(3))=\left(3,2(3^3)-15(3^2)+36(3)-1\right)=(3,54-135+108-1)=(3,26)$.

b. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ Dominio: $x\neq 1$. $f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2(1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=2$.

Intervalos:

- $(-\infty,0)$: Tomamos $x=-1$, $f'(-1)=\dfrac{(-1)(-3)}{(-2)^2}=\dfrac{3}{4}>0$. Creciente.
- $(0,1)$: Tomamos $x=0,5$, $f'(0,5)=\dfrac{0,5(-1,5)}{(-0,5)^2}=\dfrac{-0,75}{0,25}=-3<0$. Decreciente.
- $(1,2)$: Tomamos $x=1,5$, $f'(1,5)=\dfrac{1,5(-0,5)}{(0,5)^2}=\dfrac{-0,75}{0,25}=-3<0$. Decreciente.
- $(2,\infty)$: Tomamos $x=3$, $f'(3)=\dfrac{3(1)}{(2)^2}=\dfrac{3}{4}>0$. Creciente.

Extremos relativos:

- En $x=0$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $(0,f(0))=\left(0,\dfrac{0}{0-1}\right)=(0,0)$.
- En $x=2$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $(2,f(2))=\left(2,\dfrac{2^2}{2-1}\right)=(2,4)$.

c. $f(x)=2x^3+3x^2-3$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $6x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=-1$.

Intervalos:

- $(-\infty,-1)$: Tomamos $x=-2$, $f'(-2)=6(-2)(-2+1)=6(-2)(-1)=12>0$. Creciente.
- $(-1,0)$: Tomamos $x=-0,5$, $f'(-0,5)=6(-0,5)(-0,5+1)=-3(0,5)=-1,5<0$. Decreciente.
- $(0,\infty)$: Tomamos $x=1$, $f'(1)=6(1)(1+1)=12>0$. Creciente.

Extremos relativos:

- En $x=-1$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $(-1,f(-1))=\left(-1,2(-1)^3+3(-1)^2-3\right)=(-1,-2+3-3)=(-1,-2)$.
- En $x=0$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $(0,f(0))=\left(0,2(0)^3+3(0)^2-3\right)=(0,-3)$.

d. $f(x)=x+2\operatorname{sen}x$ Dominio: $\mathbb{R}$. $f'(x)=1+2\cos x$. Puntos críticos $(f'(x)=0)$: $1+2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}$. Las soluciones generales son $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ y $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$, para $k\in\mathbb{Z}$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- Si $\cos x>-\dfrac{1}{2}$, $f'(x)>0$. Esto ocurre en $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$.

- Si $\cos x < -\frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$. Esto ocurre en $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$.

Extremos relativos:

- En $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, f\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) =$ $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}\right)$.
- En $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) =$ $\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi + 2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}\right)$.

27. ¿Qué relación existe entre los máximos y mínimos relativos de las funciones cualesquiera $y_1 = f(x)$ e $y_2 = \left[f(x)\right]^2 + k$, para $k \in \mathbb{R}$?

Solución: Sea $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x) = \left[f(x)\right]^2 + k$. Calculamos las derivadas de ambas funciones:
$y_1' = f'(x)$ $y_2' = g'(x) = 2f(x)f'(x)$
Para encontrar los extremos relativos, igualamos las derivadas a cero:

– Para $y_1 = f(x)$: $f'(x) = 0$. Los puntos críticos de $f(x)$ son aquellos donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

– Para $y_2 = g(x)$: $g'(x) = 2f(x)f'(x) = 0$. Esto implica que $f(x) = 0$ o $f'(x) = 0$.

Relación entre los puntos críticos:

– Cualquier punto crítico de $f(x)$ (donde $f'(x) = 0$) es también un punto crítico de $g(x)$.

– Además, cualquier raíz de $f(x)$ (donde $f(x) = 0$) es también un punto crítico de $g(x)$.

Relación entre los extremos relativos (usando el criterio de la primera derivada):
Consideremos un punto x_0 donde $f'(x_0) = 0$.

– Si $f(x_0) > 0$:

  - Si $f(x)$ tiene un máximo en x_0 ($f'(x)$ cambia de + a –): $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ también cambia de + a – (porque $f(x)$ es positivo). Entonces, $g(x)$ también tiene un máximo en x_0.
  - Si $f(x)$ tiene un mínimo en x_0 ($f'(x)$ cambia de – a +): $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ también cambia de – a + (porque $f(x)$ es positivo). Entonces, $g(x)$ también tiene un mínimo en x_0.

– Si $f(x_0) < 0$:

  - Si $f(x)$ tiene un máximo en x_0 ($f'(x)$ cambia de + a –): $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ cambia de – a + (porque $f(x)$ es negativo, invierte el signo de $f'(x)$). Entonces, $g(x)$ tiene un mínimo en x_0.

- Si $f(x)$ tiene un mínimo en x_0 ($f'(x)$ cambia de – a +): $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ cambia de + a – (porque $f(x)$ es negativo, invierte el signo de $f'(x)$). Entonces, $g(x)$ tiene un máximo en x_0.

– Si $f(x_0) = 0$: En este caso, $g'(x_0) = 0$. El comportamiento de $g(x)$ alrededor de x_0 dependerá de cómo $f(x)$ cruza el eje x. Si $f(x)$ cambia de signo en x_0, $g(x)$ tendrá un mínimo en x_0 (ya que $\left[f(x)\right]^2$ siempre es no negativo). Si $f(x)$ no cambia de signo en x_0 (por ejemplo, $f(x)$ toca el eje x pero no lo cruza), $g(x)$ podría tener un mínimo o no tener un extremo.

En resumen:

– Los puntos críticos de $f(x)$ donde $f'(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ son también extremos relativos de $g(x)$. El tipo de extremo se mantiene si $f(x_0) > 0$ y se invierte si $f(x_0) < 0$.

– Las raíces de $f(x)$ (donde $f(x) = 0$) son puntos críticos de $g(x)$. Si $f(x)$ cambia de signo en una raíz x_0, entonces $g(x)$ tendrá un mínimo relativo en x_0.

– La constante k solo desplaza la gráfica de $g(x)$ verticalmente y no afecta la ubicación ni el tipo de los extremos relativos.

28. Sea la función $f(x) = x - \frac{a}{x}$, $x \neq 0$. Determina el valor de a para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 2$.

Solución: La función es $f(x) = x - ax^{-1}$. Dominio: $x \neq 0$. Calculamos la derivada:

$f'(x) = 1 - a(-1)x^{-2} = 1 + \frac{a}{x^2}$.

Para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 2$, se debe cumplir $f'(2) = 0$.

$1 + \frac{a}{2^2} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{a}{4} = 0 \Rightarrow \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4$.

Ahora verificamos que para $a = -4$, $x = 2$ es realmente un máximo relativo. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$. Puntos críticos ($f'(x) = 0$): $1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Analizamos el signo de $f'(x)$ alrededor de $x = 2$:

– $(-\infty, -2)$: Tomamos $x = -3$, $f'(-3) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} > 0$. Creciente.

– $(-2, 0)$: Tomamos $x = -1$, $f'(-1) = 1 - \frac{4}{1} = -3 < 0$. Decreciente.

– $(0, 2)$: Tomamos $x = 1$, $f'(1) = 1 - \frac{4}{1} = -3 < 0$. Decreciente.

– $(2, \infty)$: Tomamos $x = 3$, $f'(3) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} > 0$. Creciente.

En $x = 2$, $f'(x)$ cambia de – a +. Esto indica un mínimo relativo, no un máximo. Por lo tanto, no hay ningún valor de a para el cual $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 2$. Si la pregunta fuera para un mínimo relativo, entonces $a = -4$ sería la respuesta. Revisando el enunciado,

si $f'(x)=1+\frac{a}{x^2}$, para que sea un máximo, $f'(x)$ debería cambiar de + a –. Si a es positivo, $1+\frac{a}{x^2}$ siempre es positivo, no hay extremos. Si a es negativo, $a=-b$ con $b>0$. $f'(x)=1-\frac{b}{x^2}$.
$f'(x)=0\Rightarrow x^2=b\Rightarrow x=\pm\sqrt{b}$. Para $x=\sqrt{b}$, $f'(x)$ cambia de – a +, es un mínimo. Para $x=-\sqrt{b}$, $f'(x)$ cambia de + a –, es un máximo. Si queremos un máximo en $x=2$, entonces $-\sqrt{b}=2$, lo cual no es posible ya que $\sqrt{b}$ es positivo. Si la pregunta se refiere a un máximo en $x=-2$, entonces $-\sqrt{b}=-2\Rightarrow\sqrt{b}=2\Rightarrow b=4\Rightarrow a=-4$. Dado que la pregunta especifica $x=2$, y con $a=-4$ se obtiene un mínimo en $x=2$, la respuesta es que no existe tal valor de a. Asumo que el enunciado podría tener un error y se refiere a un mínimo o a un máximo en $x=-2$. Si se refiere a un mínimo en $x=2$, entonces $a=-4$. Si se refiere a un máximo en $x=-2$, entonces $a=-4$. Si se mantiene la pregunta tal cual, la respuesta es que no existe tal valor de a.

29. Encuentra el valor de los coeficientes de la parábola $y=ax^2+bx+c$ sabiendo que pasa por el punto $P(-2,-5)$ y tiene un mínimo relativo en $M(5,8)$.

Solución: La parábola es $f(x)=ax^2+bx+c$. 1) Pasa por $P(-2,-5)$:
$-5=a(-2)^2+b(-2)+c\Rightarrow 4a-2b+c=-5$.
2) Tiene un mínimo relativo en $M(5,8)$: Esto significa que el punto $(5,8)$ pertenece a la parábola: $8=a(5)^2+b(5)+c\Rightarrow 25a+5b+c=8$.
Además, en un mínimo relativo, la derivada es cero. Así, $f'(5)=0$. Calculamos la derivada:
$f'(x)=2ax+b$. $f'(5)=2a(5)+b=10a+b$. Entonces, $10a+b=0\Rightarrow b=-10a$.
Sustituimos $b=-10a$ en las dos primeras ecuaciones:

– $4a-2(-10a)+c=-5\Rightarrow 4a+20a+c=-5\Rightarrow 24a+c=-5$.

– $25a+5(-10a)+c=8\Rightarrow 25a-50a+c=8\Rightarrow -25a+c=8$.

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases}24a+c=-5\\-25a+c=8\end{cases}$ Restamos la segunda ecuación de la primera: $(24a+c)-(-25a+c)=-5-8$ $24a+25a=-13$
$49a=-13\Rightarrow a=-\frac{13}{49}$.

Sustituimos a para encontrar c: $c=-5-24a=-5-24\left(-\frac{13}{49}\right)=-5+\frac{312}{49}=\frac{-245+312}{49}=\frac{67}{49}$.

Sustituimos a para encontrar b: $b=-10a=-10\left(-\frac{13}{49}\right)=\frac{130}{49}$.

Los coeficientes son $a=-\frac{13}{49}$, $b=\frac{130}{49}$ y $c=\frac{67}{49}$. Para una parábola ax^2+bx+c, si $a<0$, el vértice es un máximo. Aquí $a=-\frac{13}{49}<0$, por lo que el extremo en $x=5$ es un máximo, no un mínimo. Hay una contradicción en el enunciado. Si tiene un mínimo en $M(5,8)$, entonces a debe ser positivo. Si el enunciado se refiere a un máximo en $M(5,8)$, entonces la solución es correcta. Si se refiere a un mínimo, entonces no existe tal parábola con $a<0$. Asumo que el enunciado tiene un error y se refiere a un máximo relativo en $M(5,8)$.

30. Esboza la gráfica de una función que cumpla las condiciones: $f'(x)<0$ en $(0,1)$ $f'(x)>0$ en $(-\infty,0)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$ $f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$

Solución: Analizamos las condiciones de la derivada primera:

– $f'(x)<0$ en $(0,1)$: $f(x)$ es decreciente en $(0,1)$.

– $f'(x)>0$ en $(-\infty,0)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$: $f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)$, $(1,3)$ y $(3,+\infty)$.

– $f'(0)=0$: Punto crítico en $x=0$.

– $f'(1)=0$: Punto crítico en $x=1$.

– $f'(3)=0$: Punto crítico en $x=3$.

Determinamos los extremos relativos:

– En $x=0$: $f'(x)$ cambia de + a – (creciente a decreciente). Hay un **máximo relativo** en $x=0$.

– En $x=1$: $f'(x)$ cambia de – a + (decreciente a creciente). Hay un **mínimo relativo** en $x=1$.

– En $x=3$: $f'(x)$ es positiva antes y después de $x=3$ (creciente a creciente). No hay cambio de signo en $f'(x)$, por lo tanto, no hay extremo relativo en $x=3$. Es un **punto de inflexión con tangente horizontal**.

Esbozo de la gráfica: La función sube hasta $x=0$ (máximo), baja hasta $x=1$ (mínimo), vuelve a subir hasta $x=3$ (punto de inflexión con tangente horizontal, sigue subiendo) y continúa subiendo.

– La curva viene de $-\infty$, subiendo.

– Alcanza un máximo en $x=0$.

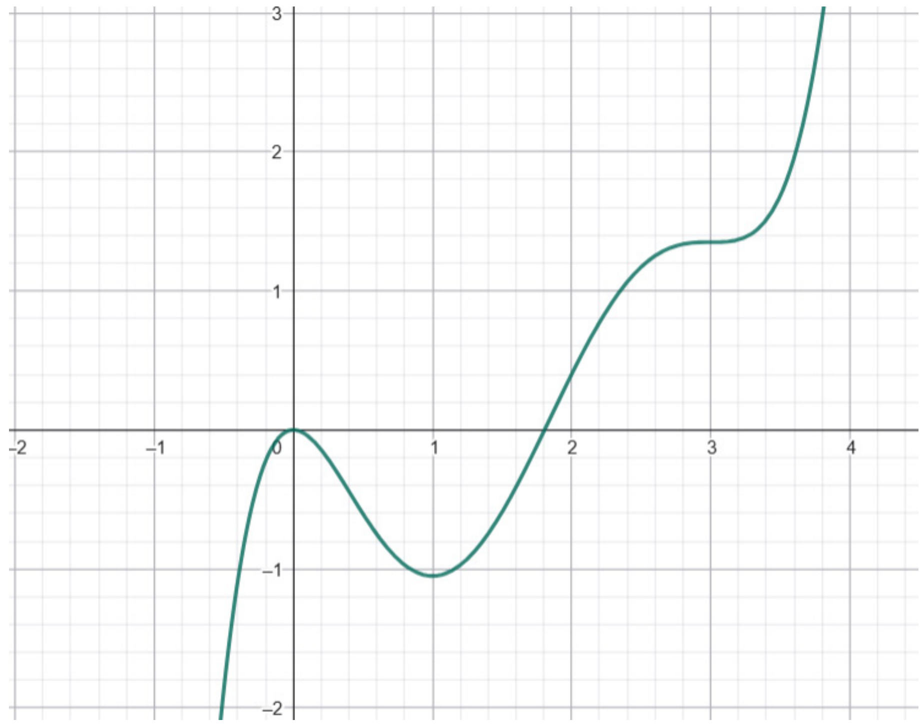
– Baja desde $x=0$ hasta $x=1$.

– Alcanza un mínimo en $x=1$.

– Sube desde $x=1$.

– En $x=3$, la curva tiene una tangente horizontal, pero sigue subiendo (es un punto de inflexión).

– Continúa subiendo hacia $+\infty$.



31. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x)=axe^{bx^2}$ tiene un máximo relativo en el punto $(2,1)$?

Solución: La función es $f(x)=axe^{bx^2}$. Si tiene un máximo relativo en $(2,1)$, se cumplen dos condiciones: 1) El punto $(2,1)$ pertenece a la función: $f(2)=1$. $1=a(2)e^{b(2^2)}\Rightarrow 1=2ae^{4b}$.
2) La derivada en $x=2$ es cero: $f'(2)=0$. Calculamos la derivada de $f(x)$ usando la regla del producto y la regla de la cadena: $u=ax\Rightarrow u'=a$ $v=e^{bx^2}\Rightarrow v'=e^{bx^2}(2bx)=2bxe^{bx^2}$

$f'(x)=ae^{bx^2}+ax\left(2bxe^{bx^2}\right)=ae^{bx^2}\left(1+2bx^2\right)$.

Aplicamos $f'(2)=0$: $ae^{b(2^2)}\left(1+2b\left(2^2\right)\right)=0$ $ae^{4b}(1+8b)=0$.
De $ae^{4b}(1+8b)=0$, como $e^{4b}\neq 0$, tenemos dos posibilidades:

- $a=0$: Si $a=0$, entonces $f(x)=0$ para todo x, lo cual no puede tener un máximo en $(2,1)$. Así que $a\neq 0$.
- $1+8b=0$: $8b=-1\Rightarrow b=-\dfrac{1}{8}$.

Entonces, $b=-\dfrac{1}{8}$.

Sustituimos $b=-\dfrac{1}{8}$ en la primera condición $1=2ae^{4b}$: $1=2ae^{4\left(-\frac{1}{8}\right)}$ $1=2ae^{-1/2}$ $1=\dfrac{2a}{\sqrt{e}}$

$2a=\sqrt{e}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

Los valores son $a=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ y $b=-\dfrac{1}{8}$.

Verificamos que es un máximo. $f'(x)=\frac{\sqrt{e}}{2}e^{-\frac{1}{8}x^2}\left(1-\frac{2}{8}x^2\right)=\frac{\sqrt{e}}{2}e^{-\frac{1}{8}x^2}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)$. Los puntos críticos son $1-\frac{1}{4}x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$. Calculamos la segunda derivada para $x=2$:

$$f''(x)=\frac{\sqrt{e}}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}x\right)e^{-\frac{1}{8}x^2}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)+e^{-\frac{1}{8}x^2}\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]f''(x)=\frac{\sqrt{e}}{2}e^{-\frac{1}{8}x^2}\left[-\frac{1}{4}x\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)-\frac{1}{2}x\right]$$

$$f''(2)=\frac{\sqrt{e}}{2}e^{-\frac{1}{8}(4)}\left[-\frac{1}{4}(2)\left(1-\frac{1}{4}(4)\right)-\frac{1}{2}(2)\right]f''(2)=\frac{\sqrt{e}}{2}e^{-1/2}\left[-\frac{1}{2}(1-1)-1\right]$$

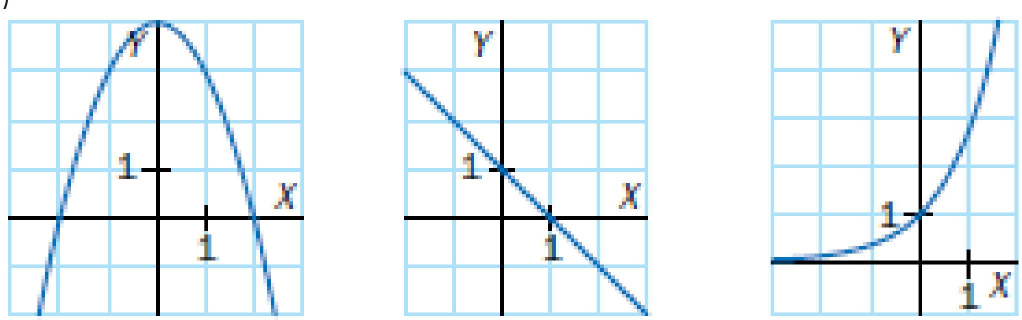
$f''(2)=\frac{\sqrt{e}}{2}\frac{1}{\sqrt{e}}[0-1]=\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{2}$. Como $f'(2)=0$ y $f''(2)<0$, el punto $(2,1)$ es un máximo relativo.

32. Analiza la gráfica de la derivada de las siguientes funciones para determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos:

a. Gráfica a)

b. Gráfica b)

c. Gráfica c)



a) $f'(x)$ b) $g'(x)$ c) $h'(x)$

Solución: Las gráficas muestran $f'(x)$, $g'(x)$ y $h'(x)$.

a. **Gráfica a) ($f'(x)$):**

- $f'(x)>0$ en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$. $\Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$.
- $f'(x)=0$ en $x=0$. No hay cambio de signo. $\Rightarrow f(x)$ no tiene extremos relativos en $x=0$.

b. **Gráfica b) ($g'(x)$):**

- $g'(x)>0$ en $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$. $\Rightarrow g(x)$ es creciente en $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$.
- $g'(x)<0$ en $(-1,1)$. $\Rightarrow g(x)$ es decreciente en $(-1,1)$.
- En $x=-1$, $g'(x)$ cambia de + a –. $\Rightarrow g(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-1$.
- En $x=1$, $g'(x)$ cambia de – a +. $\Rightarrow g(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=1$.

c. **Gráfica c) ($h'(x)$):**

- $h'(x)<0$ en $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$. $\Rightarrow h(x)$ es decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$.
- $h'(x)>0$ en $(-1,1)$. $\Rightarrow h(x)$ es creciente en $(-1,1)$.
- En $x=-1$, $h'(x)$ cambia de $-$ a $+$. $\Rightarrow h(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=-1$.
- En $x=1$, $h'(x)$ cambia de $+$ a $-$. $\Rightarrow h(x)$ tiene un máximo relativo en $x=1$.

33. Calcula en función de k los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k^2}$, $k\neq 0$.

Solución: La función es $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k^2}$. Dominio: $x^2-k^2\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm k$.

Calculamos la derivada: $f'(x)=\dfrac{0(x^2-k^2)-1(2x)}{(x^2-k^2)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2-k^2)^2}$.

Puntos críticos ($f'(x)=0$): $\dfrac{-2x}{(x^2-k^2)^2}=0$. Como $k\neq 0$, $\Rightarrow x=0$. El único punto crítico es $x=0$.

Analizamos el signo de $f'(x)$ alrededor de $x=0$, teniendo en cuenta las asíntotas verticales en $x=\pm k$:

– Si x<0, entonces –2x>0 $f'(x)>0; f(x)$ *creciente*

– Si x>0, entonces –2x<0 $f'(x)<0; f(x)$ *creciente*

Considerando las asíntotas verticales $x=\pm|k|$

– $(-\infty,-|k|); x<0;$ *creciente*

– $(-|k|,0); x<0;$ *creciente*

– $(0,|k|); >0;$ *decreciente*

– $(|k|,\infty); >0;$ *decreciente*

Extremos relativos:
En $x=0$, $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$. Máximo relativo en $(0,f(0))=\left(0,-\dfrac{1}{k^2}\right)$. No tiene mínimos relativos.

34. Calcula los valores de a, b y c en la función $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ sabiendo que esta tiene un extremo relativo en $x=1$ y que la recta tangente a su gráfica en $x=0$ es $y=x+3$.

Solución: La función es $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$. 1) La recta tangente en $x=0$ es $y=x+3$. Esto significa que el punto $(0,3)$ pertenece a la función: $f(0)=0^3-a(0)^2+b(0)+c=3 \Rightarrow c=3$.
La pendiente de la recta tangente en $x=0$ es $f'(0)$. La pendiente de $y=x+3$ es 1. Así, $f'(0)=1$.
Calculamos la derivada: $f'(x)=3x^2-2ax+b$. $f'(0)=3(0)^2-2a(0)+b=b$. Entonces, $b=1$.
2) La función tiene un extremo relativo en $x=1$. Esto significa que $f'(1)=0$. $f'(1)=3(1)^2-2a(1)$ $+b=0\ 3-2a+b=0$.

Sustituimos $b=1$ en esta ecuación: $3-2a+1=0$ $4-2a=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$.
Los valores de los coeficientes son $a=2$, $b=1$ y $c=3$. La función es $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.
Verificamos el tipo de extremo en $x=1$: $f'(x)=3x^2-4x+1$. $f''(x)=6x-4$. $f''(1)=6(1)-4=2$. Como $f'(1)=0$ y $f''(1)=2>0$, el extremo en $x=1$ es un mínimo relativo.

35. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a. $f(x)=(x+1)e^{-x}$

b. $f(x)=(x+3)^2 e^{-x}$

Solución:

a. $f(x)=(x+1)e^{-x}$ Dominio: $\mathbb{R}$. Calculamos la derivada: $u=x+1 \Rightarrow u'=1$ $v=e^{-x} \Rightarrow v'=-e^{-x}$
$f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+1)(-e^{-x})=e^{-x}(1-(x+1))=e^{-x}(1-x-1)=-xe^{-x}$.

Puntos críticos ($f'(x)=0$): $-xe^{-x}=0$. Como $e^{-x}\neq 0$, entonces $x=0$. El único punto crítico es $x=0$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $(-\infty,0)$: Tomamos $x=-1$, $f'(-1)=-(-1)e^{-(-1)}=e>0$. Creciente.
- $(0,\infty)$: Tomamos $x=1$, $f'(1)=-(1)e^{-1}=-e^{-1}<0$. Decreciente.

Extremos relativos:

- En $x=0$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $(0,f(0))=(0,(0+1)e^{-0})=(0,1)$.

b. $f(x)=(x+3)^2 e^{-x}$ Dominio: $\mathbb{R}$. Calculamos la derivada: $u=(x+3)^2 \Rightarrow u'=2(x+3)$
$(1)=2(x+3)$ $v=e^{-x} \Rightarrow v'=-e^{-x}$ $f'(x)=2(x+3)e^{-x}+(x+3)^2(-e^{-x})=e^{-x}\left(2(x+3)-(x+3)^2\right)$
$f'(x)=e^{-x}(x+3)(2-(x+3))=e^{-x}(x+3)(2-x-3)=e^{-x}(x+3)(-x-1)=-e^{-x}(x+3)(x+1)$.

Puntos críticos ($f'(x)=0$): $-e^{-x}(x+3)(x+1)=0$. Como $e^{-x}\neq 0$, entonces $(x+3)(x+1)=0 \Rightarrow$ $x=-3$ o $x=-1$. Los puntos críticos son $x=-3$ y $x=-1$.

Intervalos de crecimiento/decrecimiento:

- $(-\infty,-3)$: Tomamos $x=-4$, $f'(-4)=-e^4(-4+3)(-4+1)=-e^4(-1)(-3)=-3e^4<0$. Decreciente.
- $(-3,-1)$: Tomamos $x=-2$, $f'(-2)=-e^2(-2+3)(-2+1)=-e^2(1)(-1)=e^2>0$. Creciente.
- $(-1,\infty)$: Tomamos $x=0$, $f'(0)=-e^0(0+3)(0+1)=-1(3)(1)=-3<0$. Decreciente.

Extremos relativos:

- En $x=-3$, $f'(x)$ cambia de – a +. Mínimo relativo en $(-3,f(-3))=\left(-3,(-3+3)^2 e^{-(-3)}\right)$ $=(-3,0)$.
- En $x=-1$, $f'(x)$ cambia de + a –. Máximo relativo en $(-1,f(-1))=\left(-1,(-1+3)^2 e^{-(-1)}\right)$ $=(-1,2^2e^1)=(-1,4e)$.

36. Se lanza un cohete, y este, al cabo de t segundos, alcanza una altura, en metros, que viene dada por $f(t) = 500t - 5t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Al cabo de cuántos segundos lo logra?

Solución: Para encontrar la altura máxima, necesitamos encontrar el máximo de la función $f(t)$. Primero, calculamos la derivada de $f(t)$: $f'(t) = 500 - 10t$ Igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos: $500 - 10t = 0 \Rightarrow 10t = 500 \Rightarrow t = 50$ segundos. Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada: $f''(t) = -10$ Como $f''(50) = -10 < 0$, el punto crítico corresponde a un máximo. La altura máxima se alcanza a los $t = 50$ segundos. La altura máxima es: $f(50) = 500(50) - 5(50)^2 = 25000 - 5(2500) = 25000 - 12500 = 12500$ metros. **Respuesta:** La altura máxima que alcanza es de 12500 metros, y lo logra al cabo de 50 segundos.

37. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$. a) Calcula su dominio y las asíntotas. b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos. c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) **Dominio:** El denominador $x^2 - 3x - 4$ es cero para x=-1 y x=4. Por lo tanto, el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-1, 4\}$. **Asíntotas:** *Asíntotas verticales:* x=-1 y x=4 . *Asíntotas horizontales:* Calculamos el límite cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

Por lo tanto, hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos:** Calculamos la primera derivada $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{-x^2 - x - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2} < 0$ para todo $x \in Dom(f)$. La función es siempre decreciente en su dominio. No tiene extremos relativos

c) **Ecuación de la recta tangente en** $x = 0$: Primero, calculamos $f(0)$: $f(0) = 0$. Luego, calculamos la pendiente $m = f'(0)$: $f'(0) = \dfrac{-4}{16} = -\dfrac{1}{4}$. La ecuación de la recta tangente es $y - f(0) = m(x - 0)$: $y - 0 = -\dfrac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x$. **Respuesta:** La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = -\dfrac{1}{4}x$

38. Determina el valor de b para que la función $f(x) = x^3 - bx^2$ tenga un extremo relativo en $x = -3$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

Solución: Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$, su primera derivada debe ser cero en ese punto. Calculamos la primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 2bx$

Evaluamos $f'(-3)$ y lo igualamos a cero: $f'(-3)=3(-3)^2-2b(-3)=3(9)+6b=27+6b$

$27+6b=0 \Rightarrow 6b=-27 \Rightarrow b=-\frac{27}{6}=-\frac{9}{2}$. Ahora, para determinar si es un máximo o un mínimo, calculamos la segunda derivada con $b=-\frac{9}{2}$:

$f'(x)=3x^2-2\left(-\frac{9}{2}\right)x=3x^2+9x$ $f''(x)=6x+9$ Evaluamos $f''(-3)$: $f''(-3)=6(-3)+9=-18+9=-9$.

Como $f''(-3)<0$, el extremo relativo en $x=-3$ es un máximo. **Respuesta:** El valor de b es $-\frac{9}{2}$, y se trata de un máximo.

39. Se da la función: $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10, & \text{si } x\le k\\ x^2-4x+9, & \text{si } x>k\end{cases}$ a) Encuentra el valor de k para que la función sea continua en $x=k$. b) Para $k=1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función. ¿En qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente?

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x=k$, los límites laterales deben ser iguales al valor de la función en k. $\lim_{x\to k^-} f(x)=-k^2-3k+10$ $\lim_{x\to k^+} f(x)=k^2-4k+9$ $f(k)=-k^2-3k+10$ Igualamos los límites: $-k^2-3k+10=k^2-4k+9$ $0=2k^2-k-1$ Usamos la fórmula cuadrática: $k=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$ Las posibles valores de k son $k_1=\frac{1-3}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ y $k_2=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$. **Respuesta:** Los valores de k para que la función sea continua son $k=-\frac{1}{2}$ y $k=1$.

b) Para $k=1$, la función es: $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10, & \text{si } x\le 1\\ x^2-4x+9, & \text{si } x>1\end{cases}$ Calculamos la derivada de cada rama: $f'(x)=\begin{cases}-2x-3, & \text{si } x<1\\ 2x-4, & \text{si } x>1\end{cases}$ Puntos críticos: 1. Donde $f'(x)=0$:

- $-2x-3=0 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$. Este punto está en el intervalo $x<1$.

- $2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$. Este punto está en el intervalo $x>1$. 2. Donde $f'(x)$ no existe: En $x=1$, la derivada puede no existir. $f'(1^-)=-2(1)-3=-5$ $f'(1^+)=2(1)-4=-2$ Como $f'(1^-)\neq f'(1^+)$, la función no es derivable en $x=1$. Por lo tanto, $x=1$ es un punto crítico.

Analizamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2},1\right)$, $(1,2)$, $(2,\infty)$. - Para $x<-\frac{3}{2}$ (e.g., $x=-2$): $f'(-2)=-2(-2)-3=4-3=1>0$. $f(x)$ es creciente. - Para $-\frac{3}{2}<x<1$ (e.g., $x=0$): $f'(0)=-2(0)-3=-3<0$. $f(x)$ es decreciente. - Para $1<x<2$ (e.g., $x=1.5$): $f'(1.5)=2(1.5)-4=3-4=-1<0$. $f(x)$ es decreciente. - Para $x>2$ (e.g., $x=3$): $f'(3)=2(3)-4=6-4=2>0$. $f(x)$ es creciente.

Intervalos de crecimiento: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ y $(2,\infty)$. **Intervalos de decrecimiento:** $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ y $(1,2)$.

Extremos relativos: - En $x=-\frac{3}{2}$: $f(x)$ cambia de creciente a decreciente, por lo tanto, hay un máximo relativo. $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\left(-\frac{3}{2}\right)+10=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+10=-\frac{9}{4}+\frac{18}{4}+\frac{40}{4}=\frac{49}{4}=12.25$.
- En $x=1$: $f(x)$ cambia de decreciente a decreciente, no es un extremo relativo. (Es un punto anguloso). - En $x=2$: $f(x)$ cambia de decreciente a creciente, por lo tanto, hay un mínimo relativo. $f(2)=(2)^2-4(2)+9=4-8+9=5$. **Respuesta:** - Máximo relativo en $x=-\frac{3}{2}$ con valor $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{49}{4}$. - Mínimo relativo en $x=2$ con valor $f(2)=5$. - Intervalos de crecimiento: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,\infty)$. - Intervalos de decrecimiento: $\left(-\frac{3}{2},1\right)\cup(1,2)$.

40. Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+a$. a) Obtén los valores de los parámetros a,b y c para que la gráfica de f pase por el punto $(0,1)$ y tenga un máximo en el punto $(1,1)$.
b) La función obtenida en el apartado anterior, ¿tiene otro máximo o mínimo? En caso afirmativo, encuéntralo.

Solución:

a) Tenemos las siguientes condiciones: 1.
Pasa por $(0,1)$: $f(0)=1$. $f(0)=a(0)^3+b(0)^2+c(0)+a=a$. Entonces, $a=1$. 2. Pasa por $(1,1)$: $f(1)=1$. $f(1)=a(1)^3+b(1)^2+c(1)+a=a+b+c+a=2a+b+c$. Como $a=1$, $2(1)+b+c=1\Rightarrow 2+b+c=1\Rightarrow b+c=-1$. (Ecuación 1) 3. Tiene un máximo en $(1,1)$, lo que implica que $f'(1)=0$. Calculamos la primera derivada: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. $f'(1)=3a(1)^2+2b(1)+c=3a+2b+c$. Como $a=1$, $3(1)+2b+c=0\Rightarrow 3+2b+c=0\Rightarrow 2b+c=-3$. (Ecuación 2)
Resolvemos el sistema de ecuaciones para b y c: $\begin{cases} b+c=-1 \\ 2b+c=-3 \end{cases}$ Restamos la primera ecuación de la segunda: $(2b+c)-(b+c)=-3-(-1)\Rightarrow b=-2$. Sustituimos $b=-2$ en la

primera ecuación: $-2+c=-1\Rightarrow c=1$. Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada: $f''(x)=6ax+2b$. Con $a=1$ y $b=-2$, $f''(x)=6x-4$. $f''(1)=6(1)-4=2$. ¡Cuidado! $f''(1)=2>0$ indica un mínimo, no un máximo. Esto significa que no es posible que la función tenga un máximo en $(1,1)$ con la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+a$ y $a=1$. Revisemos el enunciado: "tenga un máximo en el punto (1,1)". If $a=1$, $b=-2$, $c=1$, entonces $f(x)=x^3-2x^2+x+1$. $f'(x)=3x^2-4x+1$. $f'(1)=3-4+1=0$. $f''(x)=6x-4$. $f''(1)=6-4=2>0$.

b) La función es $f(x)=x^3-2x^2+x+1$. $f'(x)=3x^2-4x+1$. Para encontrar otros extremos, igualamos $f'(x)=0$: $3x^2-4x+1=0$. $x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{4\pm2}{6}$.

Los puntos críticos son $x_1=\frac{4-2}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ y $x_2=\frac{4+2}{6}=\frac{6}{6}=1$. Ya sabemos que en $x=1$ hay un mínimo relativo. Ahora, analizamos $x=\frac{1}{3}$. $f''\left(\frac{1}{3}\right)=6\left(\frac{1}{3}\right)-4=2-4=-2$.

Como $f''\left(\frac{1}{3}\right)<0$, en $x=\frac{1}{3}$ hay un máximo relativo. El valor de este máximo es $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{1-6+9+27}{27}=\frac{31}{27}$. **Respuesta:** a) Los valores son $a=1, b=-2, c=1$.

41. Considérese la función $f(x)=ax^3-2x^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales. Calcula a, b y c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0,16)$.

Solución: Tenemos las siguientes condiciones: 1. Pasa por $(2,8)$: $f(2)=8$. $a(2)^3-2(2)^2+b(2)+c=8$ $8a-8+2b+c=8 \Rightarrow 8a+2b+c=16$. (Ecuación 1) 2. Tiene un extremo relativo en $(0,16)$: $f(0)=16$. $a(0)^3-2(0)^2+b(0)+c=16 \Rightarrow c=16$. 3. Tiene un extremo relativo en $(0,16)$, lo que implica $f'(0)=0$. Calculamos la primera derivada: $f'(x)=3ax^2-4x+b$. $f'(0)=3a(0)^2-4(0)+b=b$. Entonces, $b=0$.
Sustituimos $b=0$ y $c=16$ en la Ecuación 1: $8a+2(0)+16=16$ $8a+16=16 \Rightarrow 8a=0 \Rightarrow a=0$.
Si $a=0$, la función sería $f(x)=-2x^2+16$. $f'(x)=-4x$. $f'(0)=0$, lo cual es consistente. $f(0)=16$, consistente. $f(2)=-2(2)^2+16=-8+16=8$, consistente. Para verificar el tipo de extremo en $x=0$: $f''(x)=-4$. $f''(0)=-4<0$, lo que indica un máximo relativo. **Respuesta:** Los valores son $a=0, b=0, c=16$.

42. Sea la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$, tal que las rectas tangentes a su gráfica en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas. Además, tiene un extremo relativo cuando $x=1$ y $f(0)=2$. a) Encuentra los valores de A, B y C. b) Para $A=-3, B=0$ y $C=4$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

Solución:

a) Tenemos las siguientes condiciones: 1. $f(0)=2$: $f(0)=0^3+A(0)^2+B(0)+C=C$. Entonces, $C=2$. 2. Las rectas tangentes en $x=-1$ y $x=2$ son paralelas, lo que significa que $f'(-1)=f'(2)$.
Calculamos la primera derivada: $f'(x)=3x^2+2Ax+B$.

$f'(-1)=3(-1)^2+2A(-1)+B=3-2A+B$. $f'(2)=3(2)^2+2A(2)+B=12+4A+B$. Igualamos las derivadas: $3-2A+B=12+4A+B$. $3-2A=12+4A \Rightarrow -9=6A \Rightarrow A=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2}$. 3. Tiene un extremo relativo cuando $x=1$, lo que implica $f'(1)=0$. $f'(1)=3(1)^2+2A(1)+B=3+2A+B$. Como $f'(1)=0$: $3+2A+B=0$. Sustituimos $A=-\frac{3}{2}$: $3+2\left(-\frac{3}{2}\right)+B=0 \Rightarrow 3-3+B=0 \Rightarrow B=0$.

Respuesta: Los valores son $A=-\frac{3}{2}, B=0, C=2$.

b) Para $A=-3, B=0, C=4$, la función es $f(x)=x^3-3x^2+4$. Queremos la ecuación de la recta tangente en $x=-1$. Primero, calculamos $f(-1)$: $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=-1-3+4=0$. Luego, calculamos la pendiente $m=f'(-1)$: $f'(x)=3x^2-6x$. $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=3+6=9$. La ecuación de la recta tangente es $y-f(-1)=m(x-(-1))$: $y-0=9(x+1)$ $y=9x+9$.

Respuesta: La ecuación de la recta tangente en $x=-1$ es $y=9x+9$.

43. Sea la función $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$, $(x>0)$, de la que sabemos que $y=-2$ es la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$. a) Calcula los valores de los parámetros a y b. b) Para $a=b=-1$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Tiene algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, encuéntralos.

Solución:

a) La recta tangente en $x=1$ es $y=-2$. Esto significa que $f(1)=-2$ y $f'(1)$ es la pendiente de la recta tangente. La pendiente de $y=-2$ es 0. Por lo tanto, $f'(1)=0$. 1. $f(1)=-2$:

$f(1)=\frac{a(1)^2+b}{1}=a+b$.

Entonces, $a+b=-2$. (Ecuación 1) 2. $f'(1)=0$: Calculamos la primera derivada:

$f(x)=ax+\frac{b}{x}=ax+bx^{-1}$. $f'(x)=a-bx^{-2}=a-\frac{b}{x^2}$. $f'(1)=a-\frac{b}{1^2}=a-b$. Entonces,

$a-b=0 \Rightarrow a=b$. (Ecuación 2)

Sustituimos $a=b$ en la Ecuación 1: $a+a=-2 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1$. Como $a=b$, entonces $b=-1$. **Respuesta:** Los valores son $a=-1$ y $b=-1$.

b) Para $a=b=-1$, la función es $f(x)=\frac{-x^2-1}{x}=-x-\frac{1}{x}$. El dominio es $x>0$. Calculamos la primera derivada: $f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}$. Para encontrar los puntos críticos, igualamos $f'(x)=0$:

$-1+\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=1 \Rightarrow x^2=1$. Como $x>0$, el único punto crítico es $x=1$.

Analizamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(0,1)$ y $(1,\infty)$. - Para $0<x<1$ (e.g., $x=0.5$):

$f'(0.5)=-1+\frac{1}{(0.5)^2}=-1+\frac{1}{0.25}=-1+4=3>0$. $f(x)$ es creciente. - Para $x>1$ (e.g., $x=2$):

$f'(2)=-1+\frac{1}{2^2}=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}<0$. $f(x)$ es decreciente.

Intervalos de crecimiento: $(0,1)$. **Intervalos de decrecimiento:** $(1,\infty)$. **Extremos relativos:**

- En $x = 1$: $f(x)$ cambia de creciente a decreciente, por lo tanto, hay un máximo relativo. $f(1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$. **Respuesta:** - Intervalos de crecimiento: $(0,1)$. - Intervalos de decrecimiento: $(1,\infty)$. - Tiene un máximo relativo en $x = 1$ con valor $f(1) = -2$.

44. Estudia la continuidad, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos, de la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x}, & \text{si} 0 \le x < 4 \\ 2x + 4, & \text{si} 4 \le x < 8 \\ 3x + 60 - x^2, & \text{si} 8 \le x \le 9 \end{cases}$

Solución:

Dominio: $[0,9]$.

Continuidad: 1. En cada rama, las funciones son continuas en sus respectivos intervalos abiertos. - $\frac{1+x^2}{1+x}$: Continua para $x \ne -1$. En $[0,4)$, es continua. - $2x + 4$: Continua en $[4,8)$. - $3x + 60 - x^2$: Continua en $[8,9]$.

2. Puntos de unión: $x = 4$ y $x = 8$. - En $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{1+16}{5} = \frac{17}{5} = 3.4$. $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2(4) + 4 = 8 + 4 = 12$. Como los límites laterales no son iguales, la función no es continua en $x = 4$. Hay una discontinuidad de salto.

- En $x = 8$: $\lim_{x\to 8^-} f(x) = 2(8) + 4 = 16 + 4 = 20$. $\lim_{x\to 8^+} f(x) = 3(8) + 60 - 8^2 = 24 + 60 - 64 = 84 - 64 = 20$. $f(8) = 2(8) + 4 = 20$. Como los límites laterales son iguales y coinciden con $f(8)$, la función es continua en $x = 8$.

Derivabilidad y extremos relativos: Calculamos la derivada de cada rama:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(1+x) - (1+x^2)(1)}{(1+x)^2} = \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}, & \text{si} 0 < x < 4 \\ 2, & \text{si} 4 < x < 8 \\ 3 - 2x, & \text{si} 8 < x < 9 \end{cases}$$

Puntos críticos: 1. Donde $f'(x) = 0$: - Para $0 < x < 4$: $x^2 + 2x - 1 = 0$. $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Solo $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.414$ está en el intervalo $(0,4)$. - Para $4 < x < 8$: $f'(x) = 2 \ne 0$. No hay puntos críticos. - Para $8 < x < 9$: $3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$. Este punto no está en el intervalo $(8,9)$.

2. Puntos donde $f'(x)$ no existe: $x = 4$ (discontinuidad), $x = 8$ (posible punto anguloso). - En $x = 8$: $f'(8^-) = 2$. $f'(8^+) = 3 - 2(8) = 3 - 16 = -13$. Como $f'(8^-) \ne f'(8^+)$, la función no es derivable en $x = 8$. Por lo tanto, $x = 8$ es un punto crítico.

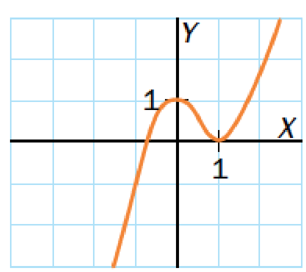
Analizamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos $\left(0,-1+\sqrt{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{2},4\right)$, $(4,8)$, $(8,9)$. - Para $0<x<-1+\sqrt{2}$ (e.g., $x=0.1$): $f'(0.1)=\dfrac{0.01+0.2-1}{(1.1)^2}=\dfrac{-0.79}{1.21}<0$. $f(x)$ es decreciente. - Para $-1+\sqrt{2}<x<4$ (e.g., $x=1$): $f'(1)=\dfrac{1+2-1}{(1+1)^2}=\dfrac{2}{4}=0.5>0$. $f(x)$ es creciente. - Para $4<x<8$: $f'(x)=2>0$. $f(x)$ es creciente. - Para $8<x<9$ (e.g., $x=8.5$): $f'(8.5)=3-2(8.5)=3-17=-14<0$. $f(x)$ es decreciente.

Intervalos de crecimiento: $\left(-1+\sqrt{2},4\right)$ y $(4,8)$.. **Intervalos de decrecimiento:** $\left(0,-1+\sqrt{2}\right)$ y $(8,9)$.

Extremos relativos: - En $x=-1+\sqrt{2}\approx 0.414$: $f(x)$ cambia de decreciente a creciente, por lo tanto, hay un mínimo relativo.

$f\left(-1+\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2}{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1+\left(1-2\sqrt{2}+2\right)}{\sqrt{2}}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}-4}{2}=2\sqrt{2}-2\approx 0.828$. - En $x=4$: Discontinuidad de salto. No es un extremo relativo. - En $x=8$: $f(x)$ cambia de creciente a decreciente, por lo tanto, hay un máximo relativo. $f(8)=20$. **Respuesta:** - Continuidad: Continua en $[0,4)\cup(4,9]$. Discontinua en $x=4$. - Intervalos de crecimiento: $\left(-1+\sqrt{2},4\right)$ y $(4,8)$. - Intervalos de decrecimiento: $\left(0,-1+\sqrt{2}\right)$ y $(8,9)$. - Mínimo relativo en $x=-1+\sqrt{2}$ con valor $f\left(-1+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2$. - Máximo relativo en $x=8$ con valor $f(8)=20$.

45. En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Representa de manera esquemática la gráfica de la función derivada $f'(x)$. Explica el razonamiento seguido.



Solución: Para esbozar la gráfica de la función derivada f' (x) a partir de la gráfica de f(x), se sigue el razonamiento siguiente:

Observaciones sobre f(x)

Máximo local en x=0.

Mínimo local en x=1.

Comportamiento de f: para x<0 la función **crece**; entre 0 y 1 **decrece**; para x>1 **crece** de nuevo.

En x=0 y x=1 la tangente es horizontal, por tanto las derivadas valen cero.

Características de f'(x)

Ceros: f'(0)=0 y f'(1)=0. En la gráfica de f' aparecen como intersecciones con el eje x en x=0 y x=1.

Signo de f':
Para x<0: f'(x)>0 (porque f sube).
Para 0<x<1: f'(x)<0 (porque f baja).
Para x>1: f'(x)>0 (porque f sube otra vez).
Magnitud: el valor absoluto de f'(x) refleja la pendiente de f. Donde f es más inclinada, f' tendrá mayor valor absoluto; donde f se aplana, f' se aproxima a cero.

46. Considera la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$. a) Calcula la derivada de la función. b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento. c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x=2$. d) Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solución:

a) **Derivada de la función:** $f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$. **Respuesta:** $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$.

b) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:** El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$.
$f'(x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$ es punto crítico. Si x<1, f´(x)>0. Es creciente. Si x>1, f´(x)<0. Es decreciente. **Hay un máximo** relativo para x=1

Respuesta: La función es creciente en $(-\infty,1)$ y decreciente en $(1,+\infty)$. Hay un máximo relativo en x=1.

c) **Ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto** $x=2$. Calculamos
$f(2)==-\frac{1}{e^2}$ y $m=f'(2)=-\frac{1}{e^2}$. Luego $y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-2)\Rightarrow y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$
Respuesta: La ecuación de la recta tangente en $x=2$ es $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$.

d) **Calcula** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**:**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L´Hopital.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$
Respuesta: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

47. El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo: $f(t)=at^2+bt+c,\ t\in[0,60]$ donde t es el tiempo medido en minutos y $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos, y que a los 40 minutos se alcanza el máximo con 36 puntos. Halla los valores de a,b y c y representa gráficamente la función obtenida.

Solución: Tenemos las siguientes condiciones: 1. Cuando comienza el programa ($t=0$), el índice de audiencia es 20 puntos: $f(0)=20$. $f(0)=a(0)^2+b(0)+c=c$
. Entonces, $c=20$. 2. A los 40 minutos ($t=40$), se alcanza el máximo con 36 puntos: $f(40)=36$. $f(40)=a(40)^2+b(40)+c=1600a+40b+c$. Como $c=20$

$, 1600a + 40b + 20 = 36 \Rightarrow 1600a + 40b = 16$. (Ecuación 1) 3. En $t = 40$ se alcanza un máximo, lo que implica $f'(40) = 0$. Calculamos la primera derivada: $f'(t) = 2at + b$. $f'(40) = 2a(40) + b = 80a + b$. Entonces, $80a + b = 0 \Rightarrow b = -80a$. (Ecuación 2) Sustituimos $b = -80a$ en la Ecuación 1: $1600a + 40(-80a) = 16 \, 1600a - 3200a = 16$

$-1600a = 16 \Rightarrow a = -\frac{16}{1600} = -\frac{1}{100} = -0.01$. Ahora, calculamos b: $b = -80a = -80(-0.01) = 0.8$.

Los valores son $a = -0.01, b = 0.8, c = 20$. La función es $f(t) = -0.01t^2 + 0.8t + 20$. Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada: $f''(t) = 2a = 2(-0.01) = -0.02$. Como $f''(40) = -0.02 < 0$, es un máximo.

Representación gráfica: La función es una parábola que se abre hacia abajo ($a < 0$).
- Vértice (máximo): $(40, 36)$. - Intersección con el eje y: $(0, 20)$.
- Intersecciones con el eje t: $-0.01t^2 + 0.8t + 20 = 0 \Rightarrow t^2 - 80t - 2000 = 0$.

$t = \frac{80 \pm \sqrt{(-80)^2 - 4(1)(-2000)}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 8000}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{14400}}{2} = \frac{80 \pm 120}{2}$. $t_1 = \frac{80 - 120}{2} = -20$ (no en el dominio). $t_2 = \frac{80 + 120}{2} = 100$. La gráfica es una parábola que empieza en $(0, 20)$, sube hasta el máximo en $(40, 36)$, y luego baja. En el intervalo $[0, 60]$, la función va de $f(0) = 20$ a $f(40) = 36$ y luego a $f(60) = -0.01(60)^2 + 0.8(60) + 20 = -0.01(3600) + 48 + 20 = -36 + 48 + 20 = 32$.

Respuesta: Los valores son $a = -0.01, b = 0.8, c = 20$. La gráfica es una parábola con vértice en $(40, 36)$, que pasa por $(0, 20)$ y $(60, 32)$.

48. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} 8t - t^2, & \text{si} 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1, & \text{si} 3 < t \leq 5 \end{cases}$ donde t es el tiempo transcurrido en meses. Responde a los tres apartados siguientes: a) Estudia el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. b) Calcula en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuántos ascienden. c) Representa la gráfica de la función $N(t)$.

Solución:

a) **Crecimiento y decrecimiento:** Primero, verificamos la continuidad en $t = 3$:
$\lim_{t \to 3^-} N(t) = 8(3) - 3^2 = 24 - 9 = 15$.
$\lim_{t \to 3^+} N(t) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$. Como los límites laterales no son iguales, la función no es continua en $t = 3$. Hay una discontinuidad de salto.

Calculamos la derivada de cada rama: $N'(t) = \begin{cases} 8 - 2t, & \text{si} 0 < t < 3 \\ 2, & \text{si} 3 < t < 5 \end{cases}$ Puntos críticos:

1. Donde $N'(t) = 0$: - Para $0 < t < 3$: $8 - 2t = 0 \Rightarrow 2t = 8 \Rightarrow t = 4$. Este punto no está en el intervalo $(0, 3)$.
- Para $3 < t < 5$: $N'(t) = 2 \neq 0$. No hay puntos críticos. 2. Puntos donde $N'(t)$ no existe: $t = 3$ (discontinuidad).

Analizamos el signo de $N'(t)$ en los intervalos $(0,3)$ y $(3,5)$. - Para $0 < t < 3$ (e.g., $t = 1$): $N'(1) = 8 - 2(1) = 6 > 0$. $N(t)$ es creciente. - Para $3 < t < 5$ (e.g., $t = 4$): $N'(4) = 2 > 0$. $N(t)$ es creciente.

Intervalos de crecimiento: $(0,3)$ y $(3,5)$. **Intervalos de decrecimiento:** No hay.

b) **Máximo y mínimo número de ventas:** Como la función es creciente en ambos intervalos, los extremos absolutos se encontrarán en los límites de los intervalos y en el punto de discontinuidad. - $N(0) = 8(0) - 0^2 = 0$. - $\lim_{t\to 3^-} N(t) = 15$. - $\lim_{t\to 3^+} N(t) = 5$. - $N(5) = 2(5) - 1 = 9$.

El valor más bajo es 0 (en $t = 0$). El valor más alto es 15 (justo antes de $t = 3$). Sin embargo, debido a la discontinuidad, el "mínimo" después de $t = 3$ es 5 (en $t = 3^+$). El máximo absoluto en el intervalo $[0,5]$ es 15 (alcanzado en $t = 3^-$). El mínimo absoluto en el intervalo $[0,5]$ es 0 (alcanzado en $t = 0$). Si consideramos los valores de la función: - Mínimo en $t = 0$: $N(0) = 0$ (miles de unidades). - Máximo en $t = 3$ (justo antes del salto): $N(3^-) = 15$ (miles de unidades).

- Mínimo local en $t = 3$ (justo después del salto): $N(3^+) = 5$ (miles de unidades). - Máximo en $t = 5$: $N(5) = 9$ (miles de unidades).

Respuesta: - El número de ejemplares vendidos es creciente en $(0,3)$ y en $(3,5)$. No hay decrecimiento. - El mínimo número de ventas es 0 (en $t = 0$). El máximo número de ventas es 15 (justo antes de $t = 3$).

c) **Representación gráfica de** $N(t)$**:** - Para $0 \le t \le 3$: $N(t) = 8t - t^2$. Es una parábola que se abre hacia abajo, con vértice en $t = -\dfrac{8}{2(-1)} = 4$. En el intervalo $[0,3]$, la función es creciente. $N(0) = 0$. $N(1) = 7$. $N(2) = 12$. $N(3) = 15$. - Para $3 < t \le 5$: $N(t) = 2t - 1$. Es una recta. $N(3^+) = 5$. $N(4) = 7$. $N(5) = 9$. La gráfica es una parábola de $t = 0$ a $t = 3$, que va de $(0,0)$ a $(3,15)$. En $t = 3$ hay un salto, y la función continúa como una línea recta de $(3,5)$ a $(5,9)$. **Respuesta:** (Descripción de la gráfica) La gráfica es una parábola de $t = 0$ a $t = 3$, que va de $(0,0)$ a $(3,15)$. En $t = 3$ hay un salto, y la función continúa como una línea recta de $(3,5)$ a $(5,9)$.

49. Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen tarifas distintas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido; mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos. a) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si realizamos un recorrido de 10 km? ¿Y si hacemos uno de 80 km? Calcula la diferencia de precio en cada caso. ¿Existe algún coste fijo en la tarifa de la compañía B por el solo hecho de subir al taxi? b) Determina para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si consideramos solo los trayectos inferiores a esa cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y otra es máxima? ¿Cuál es esa diferencia máxima de precio?

Solución: Las funciones de coste son: Compañía A: $C_A(x) = 20 + 0.4x$. Compañía B: $C_B(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 10$.

a) **Comparación de tarifas:** - Para $x = 10$ km: $C_A(10) = 20 + 0.4(10) = 20 + 4 = 24$ €. $C_B(10) = 0.01(10)^2 + 0.1(10) + 10 = 0.01(100) + 1 + 10 = 1 + 1 + 10 = 12$ €. La compañía B es más económica. Diferencia: $24 - 12 = 12$ €.

- Para $x = 80$ km: $C_A(80) = 20 + 0.4(80) = 20 + 32 = 52$ €.

$C_B(80) = 0.01(80)^2 + 0.1(80) + 10 = 0.01(6400) + 8 + 10 = 64 + 8 + 10 = 82$ €. La compañía A es más económica. Diferencia: $82 - 52 = 30$ €.

Coste fijo en la tarifa de la compañía B: El coste fijo es el precio cuando $x = 0$. $C_B(0) = 0.01(0)^2 + 0.1(0) + 10 = 10$ €. Sí, la compañía B tiene un coste fijo de 10 €.

b) **Kilómetros para que las tarifas coincidan:** Igualamos $C_A(x) = C_B(x)$:

$20 + 0.4x = 0.01x^2 + 0.1x + 10\ 0 = 0.01x^2 + 0.1x - 0.4x + 10 - 20\ 0 = 0.01x^2 - 0.3x - 10$. Multiplicamos por 100 para eliminar decimales: $x^2 - 30x - 1000 = 0$.

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(-1000)}}{2(1)} = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 4000}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{4900}}{2} = \frac{30 \pm 70}{2}.$$

$x_1 = \frac{30 - 70}{2} = \frac{-40}{2} = -20$ (no es un valor válido para kilómetros). $x_2 = \frac{30 + 70}{2} = \frac{100}{2} = 50$. Las tarifas coinciden para $x = 50$ km.

Máxima diferencia de precio para trayectos inferiores a 50 km: Definimos la función diferencia $D(x) = C_B(x) - C_A(x)$ (o al revés, para que sea positiva). $D(x) = (0.01x^2 + 0.1x + 10) - (20 + 0.4x) = 0.01x^2 - 0.3x - 10$. Queremos maximizar $|D(x)|$ en el intervalo $(0, 50)$. Calculamos la derivada de $D(x)$: $D'(x) = 0.02x - 0.3$. Igualamos a cero para encontrar puntos críticos: $0.02x - 0.3 = 0 \Rightarrow 0.02x = 0.3 \Rightarrow x = \frac{0.3}{0.02} = 15$. Este punto $x = 15$ está en el intervalo $(0, 50)$. Calculamos la segunda derivada: $D''(x) = 0.02 > 0$. Esto indica un mínimo para $D(x)$. Por lo tanto, la máxima diferencia (en valor absoluto) se dará en los extremos del intervalo o en el punto crítico si es un máximo. En $x = 15$, $D(15) = 0.01(15)^2 - 0.3(15) - 10 = 0.01(225) - 4.5 - 10 = 2.25 - 4.5 - 10 = -12.25$. En $x = 0$, $D(0) = -10$.

En $x = 50$, $D(50) = 0$. La máxima diferencia absoluta es $|-12.25| = 12.25$ €. Se produce en $x = 15$ km. **Respuesta:** a) Para 10 km, compañía B es más económica (12 € vs 24 €), diferencia 12 €.

Para 80 km, compañía A es más económica (52 € vs 82 €), diferencia 30 €. Sí, compañía B tiene un coste fijo de 10 €. b) Las tarifas coinciden para $x = 50$ km. La máxima diferencia de precio es de 12.25 € y se produce para 15 km.

50. Sea la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1 + |x|}{1 - |x|}$. a) Estudia la continuidad y la derivabilidad. b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución: La función se puede reescribir por tramos en el intervalo $(-1, 1)$: - Si $x \in (-1, 0)$: $|x| = -x$. Entonces $f(x) = \frac{1 - x}{1 - (-x)} = \frac{1 - x}{1 + x}$. - Si $x = 0$: $f(0) = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$. - Si $x \in (0, 1)$: $|x| = x$. Entonces $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$.

a) **Continuidad:** - En $(-1,0)$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ es continua ya que $1+x\neq 0$ en este intervalo.

- En $(0,1)$, $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ es continua ya que $1-x\neq 0$ en este intervalo. - En $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-0}{1+0}=1$. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+0}{1-0}=1$. $f(0)=1$. Como los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0)$, la función es continua en $x=0$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en todo su dominio $(-1,1)$.

Derivabilidad: Calculamos la derivada de cada rama: - Para $x\in(-1,0)$:

$f'(x)=\frac{-1(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2}$. - Para $x\in(0,1)$:

$f'(x)=\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$. - En $x=0$: $f'(0^-)=\frac{-2}{(1+0)^2}=-2$.

$f'(0^+)=\frac{2}{(1-0)^2}=2$. Como $f'(0^-)\neq f'(0^+)$, la función no es derivable en $x=0$.

b) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:** - Para $x\in(-1,0)$: $f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2}$. El numerador es negativo y el denominador es positivo, por lo tanto $f'(x)<0$. La función es decreciente. - Para $x\in(0,1)$: $f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$. El numerador es positivo y el denominador es positivo, por lo tanto $f'(x)>0$. La función es creciente. **Respuesta:** - Continuidad: $f(x)$ es continua en $(-1,1)$.

- Derivabilidad: $f(x)$ es derivable en $(-1,0)\cup(0,1)$, pero no en $x=0$. - Intervalos de crecimiento: $(0,1)$. - Intervalos de decrecimiento: $(-1,0)$.

Concavidad y puntos de inflexión

51. Halla los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de las siguientes curvas: a) $f(x)=x^4-2x^3$ b) $g(x)=x^3-3x^2-9x$ c) $h(x)=2x^3-9x^2+12x-4$

Solución:

a) $f(x)=x^4-2x^3$ Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada:

$f'(x)=4x^3-6x^2$. Segunda derivada: $f''(x)=12x^2-12x$. Puntos de inflexión: Igualamos $f''(x)=0$: $12x^2-12x=0\Rightarrow 12x(x-1)=0$. Los posibles puntos de inflexión son $x=0$ y $x=1$. Analizamos el signo de $f''(x)$ en los intervalos $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. - Para $x<0$ (e.g., $x=-1$): $f''(-1)=12(-1)^2-12(-1)=12+12=24>0$. Cóncava (abierta hacia arriba). - Para $0<x<1$ (e.g., $x=0.5$): $f''(0.5)=12(0.5)^2-12(0.5)=12(0.25)-6=3-6=-3<0$. Convexa (abierta hacia abajo). - Para $x > 1$ (e.g., $x = 2$): $f''(2) = 12(2)^2 - 12(2) = 48 - 24 = 24 > 0$. Cóncava (abierta hacia arriba). Como $f''(x)$ cambia de signo en $x = 0$ y $x = 1$, ambos son puntos de inflexión. $f(0) = 0^4 - 2(0)^3 = 0$. Punto de inflexión: $(0,0)$. $f(1) = 1^4 - 2(1)^3 = 1 - 2 = -1$. Punto de inflexión: $(1,-1)$.

Respuesta a): - Cóncava en $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$. - Convexa en $(0,1)$. - Puntos de inflexión: $(0,0)$ y $(1,-1)$.

b) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada: $g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Segunda derivada: $g''(x) = 6x - 6$. Puntos de inflexión: Igualamos $g''(x) = 0$: $6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$. Analizamos el signo de $g''(x)$ en los intervalos $(-\infty,1)$, $(1,\infty)$. - Para $x < 1$ (e.g., $x = 0$): $g''(0) = -6 < 0$. Convexa (abierta hacia abajo). - Para $x > 1$ (e.g., $x = 2$): $g''(2) = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6 > 0$. Cóncava (abierta hacia arriba). Como $g''(x)$ cambia de signo en $x = 1$, es un punto de inflexión. $g(1) = 1^3 - 3(1)^2 - 9(1) = 1 - 3 - 9 = -11$. Punto de inflexión: $(1,-11)$. **Respuesta b):** - Convexa en $(-\infty,1)$. - Cóncava en $(1,\infty)$. - Punto de inflexión: $(1,-11)$.

c) $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada: $h'(x) = 6x^2 - 18x + 12$. Segunda derivada: $h''(x) = 12x - 18$. Puntos de inflexión: Igualamos $h''(x) = 0$: $12x - 18 = 0 \Rightarrow 12x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$. Analizamos el signo de $h''(x)$ en los intervalos $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$. - Para $x < \frac{3}{2}$ (e.g., $x = 0$): $h''(0) = -18 < 0$. Convexa (abierta hacia abajo). - Para $x > \frac{3}{2}$ (e.g., $x = 2$): $h''(2) = 12(2) - 18 = 24 - 18 = 6 > 0$. Cóncava (abierta hacia arriba). Como $h''(x)$ cambia de signo en $x = \frac{3}{2}$, es un punto de inflexión. $h\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + 18 - 4 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{72}{4} - \frac{16}{4} = \frac{27 - 81 + 72 - 16}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Punto de inflexión: $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. **Respuesta c):** - Convexa en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. - Cóncava en $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$. - Punto de inflexión: $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

52. Dada la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$, prueba que el punto de inflexión es el punto medio de los dos extremos relativos.

Solución:

Dominio: $\mathbb{R}$. **Extremos relativos:** Primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$. Igualamos $f'(x) = 0$: $3x^2 - 24x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$. $(x-2)(x-6) = 0$.
Los puntos críticos son $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$. Segunda derivada: $f''(x) = 6x - 24$. - En $x = 2$: $f''(2) = 6(2) - 24 = 12 - 24 = -12 < 0$. Máximo relativo. - En $x = 6$: $f''(6) = 6(6) - 24 = 36 - 24 = 12 > 0$.

Mínimo relativo. Los extremos relativos están en $x = 2$ y $x = 6$.
Punto de inflexión: Igualamos $f''(x) = 0$: $6x - 24 = 0 \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$. Para verificar que es un punto de inflexión, calculamos la tercera derivada: $f'''(x) = 6$. Como $f'''(4) = 6 \neq 0$, $x = 4$ es un punto de inflexión. El punto de inflexión está en $x = 4$.
Punto medio de los extremos relativos: El punto medio de las abscisas de los extremos relativos es $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Este valor coincide con la abscisa del punto de inflexión.
Respuesta: Se ha probado que la abscisa del punto de inflexión ($x = 4$) es el punto medio de las abscisas de los extremos relativos ($x = 2$ y $x = 6$).

53. Halla los máximos y los mínimos relativos, así como los puntos de inflexión, de la función $f(x) = \sin x + \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Posteriormente, dibuja la curva en ese intervalo.

Solución:

Dominio: $[0, 2\pi]$. **Extremos relativos:** Primera derivada: $f'(x) = \cos x - \sin x$. Igualamos $f'(x) = 0$: $\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$. En el intervalo $[0, 2\pi]$, las soluciones son $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$. Segunda derivada: $f''(x) = -\sin x - \cos x$. - En $x = \frac{\pi}{4}$:

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$. Máximo relativo.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. - En $x = \frac{5\pi}{4}$:

$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$. Mínimo relativo.

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

Puntos de inflexión: Igualamos $f''(x) = 0$: $-\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$.

En el intervalo $[0, 2\pi]$, las soluciones son $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$. Tercera derivada: $f'''(x) = -\cos x + \sin x$.

- En $x = \frac{3\pi}{4}$: $f'''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 0$.

Punto de inflexión. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. - En $x = \frac{7\pi}{4}$:

$f'''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0$. Punto de inflexión.

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Valores en los extremos del intervalo: $f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$.

$f(2\pi) = \sin(2\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$.

Respuesta: - Máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$ con valor $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. - Mínimo relativo en $x=\frac{5\pi}{4}$ con valor $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$. - Puntos de inflexión en $x=\frac{3\pi}{4}$ y $x=\frac{7\pi}{4}$ con valor $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$ y $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=0$.

Gráfica: La curva comienza en $(0,1)$, sube a un máximo en $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, baja pasando por un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, alcanza un mínimo en $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, sube pasando por un punto de inflexión en $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$, y termina en $(2\pi,1)$.

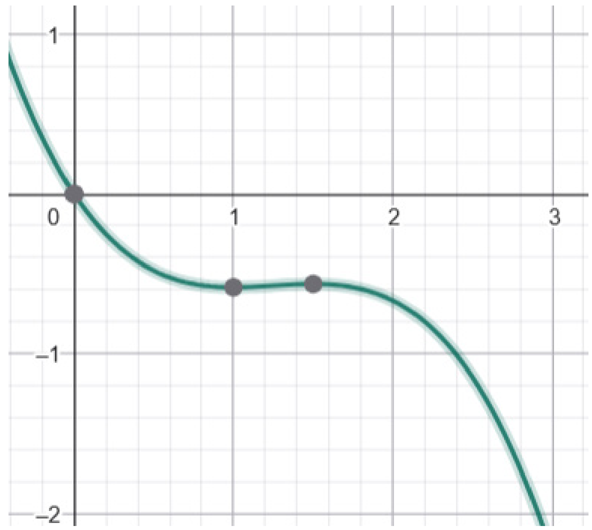
54. Prueba que la función $f(x)=(x-2)^4$ tiene un extremo relativo en $x=2$, si bien $f''(2)=0$. ¿Tiene $f(x)$ puntos de inflexión?

Solución: Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada: $f'(x)=4(x-2)^3$. Igualamos $f'(x)=0$: $4(x-2)^3=0 \Rightarrow x=2$. Este es un punto crítico. Segunda derivada: $f''(x)=12(x-2)^2$. Evaluamos $f''(2)$: $f''(2)=12(2-2)^2=0$. Como $f''(2)=0$, el criterio de la segunda derivada no es concluyente. Usamos el criterio de la primera derivada. Analizamos el signo de $f'(x)$ alrededor de $x=2$: - Para $x<2$ (e.g., $x=1$): $f'(1)=4(1-2)^3=4(-1)^3=-4<0$. $f(x)$ es decreciente. - Para $x>2$ (e.g., $x=3$): $f'(3)=4(3-2)^3=4(1)^3=4>0$. $f(x)$ es creciente. Como $f(x)$ cambia de decreciente a creciente en $x=2$, tiene un mínimo relativo en $x=2$. $f(2)=(2-2)^4=0$.
Puntos de inflexión: Para que haya un punto de inflexión, $f''(x)$ debe cambiar de signo. $f''(x)=12(x-2)^2$. Para $x<2$, $(x-2)^2>0$, entonces $f''(x)>0$. Para $x>2$, $(x-2)^2>0$, entonces $f''(x)>0$. Como $f''(x)$ no cambia de signo en $x=2$ (siempre es positivo), no hay puntos de inflexión. **Respuesta:** La función tiene un mínimo relativo en $x=2$. No tiene puntos de inflexión porque la segunda derivada no cambia de signo en $x=2$.

55. Dibuja la gráfica de una función que sea continua en el intervalo $[0,2]$ y tenga un máximo absoluto en $x=0$, un mínimo absoluto en $x=2$, un mínimo relativo en $x=1$ y un máximo relativo en $x=\frac{3}{2}$.

Solución: (Descripción de la gráfica) La gráfica debe cumplir: - Continua en $[0,2]$. - $f(0)$ es el valor más alto en el intervalo. - $f(2)$ es el valor más bajo en el intervalo. - En $x=1$, hay un "valle" local. - En $x=\frac{3}{2}$, hay una "cima" local.
Un posible comportamiento de la gráfica sería: 1. Comienza en $x=0$ en su punto más alto (máximo absoluto). 2. Decrece desde $x=0$ hasta $x=1$, donde alcanza un mínimo relativo. 3. Crece desde $x=1$ hasta $x=\frac{3}{2}$, donde alcanza un máximo relativo. 4. Decrece desde

$x = \frac{3}{2}$ hasta $x = 2$, donde alcanza el mínimo absoluto del intervalo. La curva debe ser suave (derivable) en los puntos de extremos relativos.



56. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$, donde $a \in \mathbb{R}$. Halla el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = \sqrt{3}$.

Solución: Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = \sqrt{3}$, su primera derivada debe ser cero en ese punto. Calculamos la primera derivada: $f'(x) = \frac{1(x^2 + a) - x(2x)}{(x^2 + a)^2} = \frac{x^2 + a - 2x^2}{(x^2 + a)^2} = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2}$. Evaluamos $f'(\sqrt{3})$ y lo igualamos a cero: $f'(\sqrt{3}) = \frac{a - (\sqrt{3})^2}{\left((\sqrt{3})^2 + a\right)^2} = \frac{a - 3}{(3 + a)^2}$. Para que $f'(\sqrt{3}) = 0$, el numerador debe ser cero: $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$. Además, el denominador no debe ser cero, $3 + a \neq 0 \Rightarrow 3 + 3 = 6 \neq 0$, lo cual es válido. **Respuesta:** El valor de a es 3.

57. Para $a = 4$, halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la curva de la actividad anterior.

Solución: La función es $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$. Dominio: $\mathbb{R}$ (ya que $x^2 + 4$ nunca es cero). **Extremos relativos:** Primera derivada (usando la fórmula de la actividad 56 con $a = 4$): $f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$.

Igualamos $f'(x) = 0$: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos críticos: $x = -2$ y $x = 2$.

Analizamos el signo de $f'(x)$: - Para $x<-2$ (e.g., $x=-3$): $f'(-3)=\frac{4-(-3)^2}{\left((-3)^2+4\right)^2}=\frac{4-9}{(9+4)^2}=\frac{-5}{13^2}<0$.

Decreciente. - Para $-2<x<2$ (e.g., $x=0$): $f'(0)=\frac{4-0^2}{\left(0^2+4\right)^2}=\frac{4}{4^2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}>0$. Creciente. - Para

$x>2$ (e.g., $x=3$): $f'(3)=\frac{4-3^2}{\left(3^2+4\right)^2}=\frac{4-9}{(9+4)^2}=\frac{-5}{13^2}<0$. Decreciente. - En $x=-2$: cambia de

decreciente a creciente. Mínimo relativo. $f(-2)=\frac{-2}{(-2)^2+4}=\frac{-2}{4+4}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$. - En $x=2$: cambia

de creciente a decreciente. Máximo relativo. $f(2)=\frac{2}{2^2+4}=\frac{2}{4+4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Puntos de inflexión: Calculamos la segunda derivada:

$f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4}$ $f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+4\right)-4x\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$

$f''(x)=\frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{2x^3-24x}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$. Igualamos $f''(x)=0$: $2x\left(x^2-12\right)=0$. Los

posibles puntos de inflexión son $x=0$, $x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$. Analizamos el signo de

$f''(x)$: - Para $x<-2\sqrt{3}$ (e.g., $x=-4$): $f''(-4)=\frac{2(-4)\left((-4)^2-12\right)}{\left((-4)^2+4\right)^3}=\frac{-8(16-12)}{(16+4)^3}=\frac{-8(4)}{20^3}<0$. Convexa.

- Para $-2\sqrt{3}<x<0$ (e.g., $x=-1$): $f''(-1)=\frac{2(-1)\left((-1)^2-12\right)}{\left((-1)^2+4\right)^3}=\frac{-2(1-12)}{(1+4)^3}=\frac{-2(-11)}{5^3}=\frac{22}{125}>0$

. Cóncava. - Para $0<x<2\sqrt{3}$ (e.g., $x=1$): $f''(1)=\frac{2(1)\left(1^2-12\right)}{\left(1^2+4\right)^3}=\frac{2(-11)}{5^3}<0$

. Convexa. - Para $x>2\sqrt{3}$ (e.g., $x=4$): $f''(4)=\frac{2(4)\left(4^2-12\right)}{\left(4^2+4\right)^3}=\frac{8(16-12)}{20^3}=\frac{8(4)}{20^3}>0$

. Cóncava. Como $f''(x)$ cambia de signo en $x=-2\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=2\sqrt{3}$, todos son

puntos de inflexión. $f\left(-2\sqrt{3}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+4}=\frac{-2\sqrt{3}}{12+4}=\frac{-2\sqrt{3}}{16}=-\frac{\sqrt{3}}{8}$. $f(0)=\frac{0}{0^2+4}=0$.

$f\left(2\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+4}=\frac{2\sqrt{3}}{12+4}=\frac{2\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. **Respuesta:** - Mínimo relativo en $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$. - Máximo relativo en $\left(2,\frac{1}{4}\right)$. - Puntos de inflexión en $\left(-2\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $(0,0)$ y $\left(2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

58. Calcula los valores de a y b para que la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tenga un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.

Solución: Tenemos las siguientes condiciones: 1. Punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$, lo que implica $g''\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Primera derivada: $g'(x)=3ax^2+2bx$. Segunda derivada: $g''(x)=6ax+2b$. $g''\left(\frac{1}{2}\right)=6a\left(\frac{1}{2}\right)+2b=3a+2b$. Entonces, $3a+2b=0$. (Ecuación 1) 2. La derivada en este punto es $-\frac{3}{2}$, lo que implica $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$. $g'\left(\frac{1}{2}\right)=3a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3a}{4}+2b$. Entonces, $\frac{3a}{4}+2b=-\frac{3}{2}\Rightarrow 3a+4b=-6$. (Ecuación 2)
Resolviendo el sistema de dos ecuaciones, resulta:

Respuesta: Los valores son $a=2$ y $b=-3$.

59. Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, averigua los valores de a,b,c y d sabiendo que tiene un máximo relativo en el punto $(1,0)$, un punto de inflexión en $x=0$ y que la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=2$ es -9.

Solución: Tenemos las siguientes condiciones: 1. Máximo relativo en $(1,0)$: $f(1)=0$ y $f'(1)=0$. $f(1)=a(1)^3+b(1)^2+c(1)+d=a+b+c+d=0$. (Ecuación 1) Primera derivada: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. $f'(1)=3a(1)^2+2b(1)+c=3a+2b+c=0$.
(Ecuación 2) 2. Punto de inflexión en $x=0$, lo que implica $f''(0)=0$. Segunda derivada: $f''(x)=6ax+2b$. $f''(0)=6a(0)+2b=2b$. Entonces, $2b=0\Rightarrow b=0$. 3. La pendiente de la recta tangente en $x=2$ es -9, lo que implica $f'(2)=-9$. $f'(2)=3a(2)^2+2b(2)+c=12a+4b+c=-9$.
(Ecuación 3)
Sustituimos $b=0$. en las ecuaciones: - Ecuación 1: $a+0+c+d=0\Rightarrow a+c+d=0$.
(Ecuación 1') - Ecuación 2: $3a+2(0)+c=0\Rightarrow 3a+c=0$. (Ecuación 2') - Ecuación 3: $12a+4(0)+c=-9\Rightarrow 12a+c=-9$. (uación 3')
Resolvemos el sistema para a y c con Ecuación 2' y 3': $\begin{cases}3a+c=0\\12a+c=-9\end{cases}$ Restamos la Ecuación 2' de la Ecuación 3': $(12a+c)-(3a+c)=-9-0\Rightarrow 9a=-9\Rightarrow a=-1$. Sustituimos $a=-1$ en Ecuación 2': $3(-1)+c=0\Rightarrow -3+c=0\Rightarrow c=3$. Sustituimos $a=-1$ y $c=3$ en Ecuación 1': $-1+3+d=0\Rightarrow 2+d=0\Rightarrow d=-2$.
Verificamos que en $(1,0)$ es un máximo: $f''(x)=6ax+2b=6(-1)x+2(0)=-6x$.
$f''(1)=-6(1)=-6<0$. Es un máximo. Verificamos que en $x=0$ es un punto de inflexión:

$f''(x) = -6x$. Para $x < 0$, $f''(x) > 0$ (cóncava). Para $x > 0$, $f''(x) < 0$ (convexa). Cambia de signo, así que $x = 0$ es un punto de inflexión. **Respuesta:** Los valores son $a = -1, b = 0, c = 3, d = -2$.

Dibujo de curvas

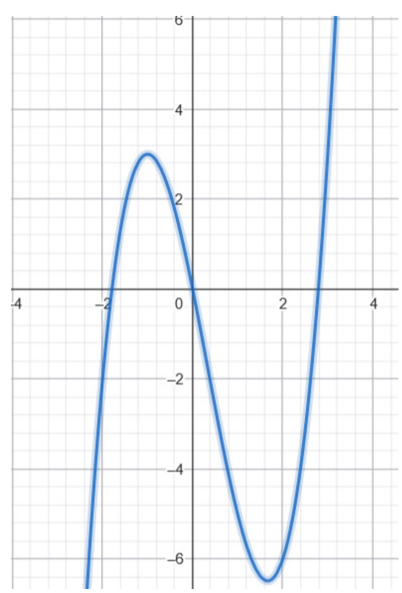
60. Representa gráficamente las siguientes funciones: a) $y = x^3 - x^2 - 5x$ b) $y = \frac{1}{3}x(x-3)^2$ c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Solución: (Descripción de las gráficas)

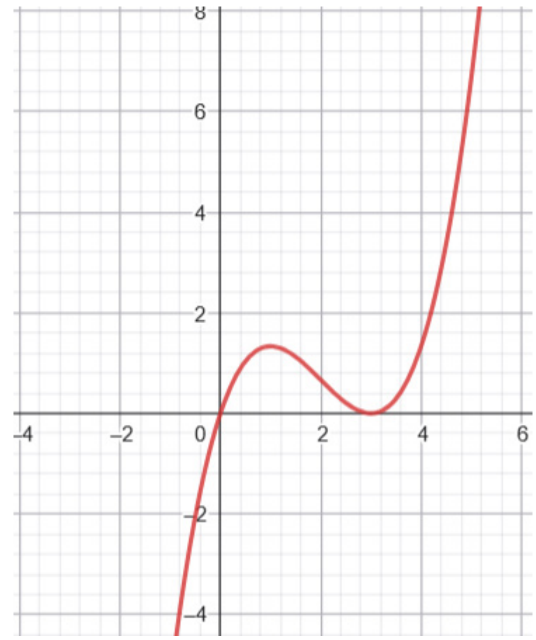
a) $y = x^3 - x^2 - 5x$ - Dominio: $\mathbb{R}$. - Cortes con los ejes: $y = x(x^2 - x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x^2 - x - 5 = 0$. $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-5)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Puntos: $(0,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, 0\right)$. - Derivada primera: $y' = 3x^2 - 2x - 5$. Ceros: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(3)(-5)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$. $x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ y $x = \frac{-6}{6} = -1$. - Derivada segunda: $y'' = 6x - 2$.

Cero: $x = \frac{1}{3}$. - Máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 5/3$. Punto de inflexión en $x = 1/3$.

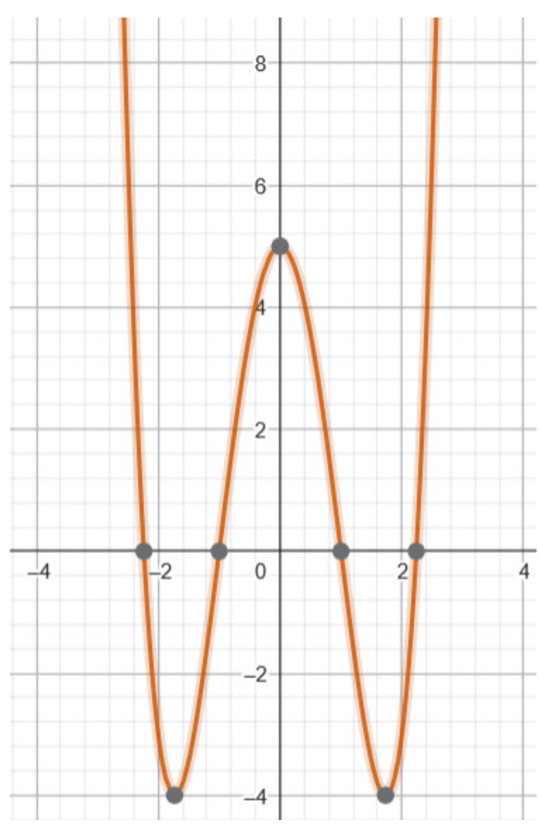
- Comportamiento: Sube, baja, sube.



b) $y = \frac{1}{3}x(x-3)^2$ - Dominio: $\mathbb{R}$. - Cortes con los ejes: $y = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$ (raíz doble). Puntos: $(0,0)$, $(3,0)$. - Derivada primera: $y' = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 2x \cdot (x-3) = \frac{1}{3}(x-3)(3x-3) = (x-3)(x-1)$. Ceros: $x = 1, x = 3$. - Derivada segunda: $y'' = 2x - 4 = 2(x-2)$. Cero: $x = 2$. - Máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 3$. Punto de inflexión en $x = 2$. - Comportamiento: Sube, baja, sube.

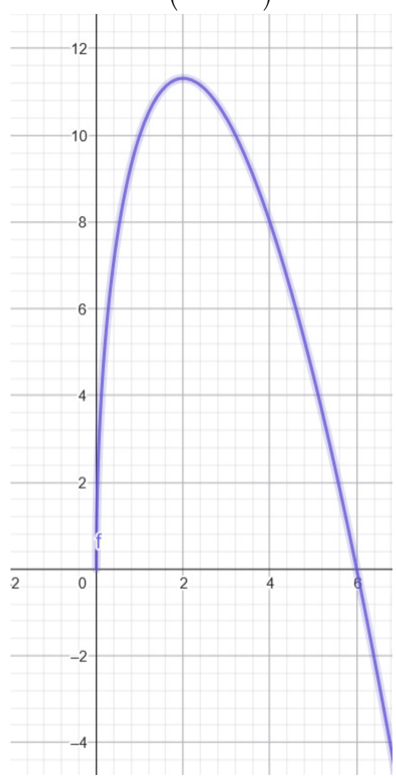


c) $f(x)=x^4-6x^2+5$ - Dominio: $\mathbb{R}$. - Cortes con los ejes: $y=0 \Rightarrow x^4-6x^2+5=0$. Sea $u=x^2$, $u^2-6u+5=0 \Rightarrow (u-1)(u-5)=0$. $u=1 \Rightarrow x=\pm 1$. $u=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$. Puntos: $(\pm 1,0)$, $(\pm\sqrt{5},0)$. $f(0)=5$.- Derivada primera: $f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$. Ceros: $x=0, x=\pm\sqrt{3}$. - Derivada segunda: $f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$. Ceros: $x=\pm 1$. - Mínimos en $x=\pm\sqrt{3}$, máximo en $x=0$. Puntos de inflexión en $x=\pm 1$. - Comportamiento: Baja, sube, baja, sube (simétrica respecto al eje y).



61. Dibuja la curva $f(x)=2\sqrt{x}(6-x)$.

Solución: (Descripción de la gráfica) - Dominio: Para $\sqrt{x}$, $x \geq 0$. - Cortes con los ejes: $f(x)=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}(6-x)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=6$. Puntos: $(0,0)$, $(6,0)$. - Derivada primera: $f(x)=12x^{1/2}-2x^{3/2}$. $f'(x)=12\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}-2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}=6x^{-1/2}-3x^{1/2}=\frac{6}{\sqrt{x}}-3\sqrt{x}=\frac{6-3x}{\sqrt{x}}$.
Ceros: $6-3x=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$. - Derivada segunda:
$f''(x)=-3\cdot\frac{1}{2}x^{-3/2}-3\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}=-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}=-\frac{3(1+x)}{2x\sqrt{x}}$. Ceros: No hay para $x>0$. - Máximo en $x=2$. $f(2)=2\sqrt{2}(6-2)=2\sqrt{2}(4)=8\sqrt{2}\approx 11.31$. - Puntos de inflexión: No hay. - Comportamiento: Empieza en $(0,0)$, sube hasta un máximo en $(2,8\sqrt{2})$, y luego baja hasta $(6,0)$.



62. Dibuja las siguientes curvas:

a) $f(x)=(1-x)e^{-x}$

b) $f(x)=e^{1/x^2}$

c) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$

e) $f(x)=x\ln x$

f) $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$

g) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+1}}$

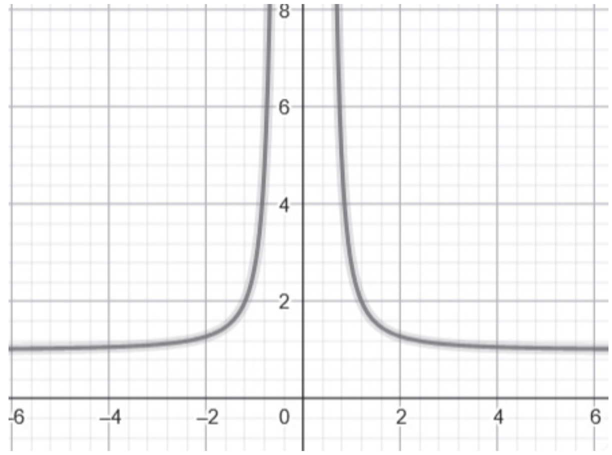
i) $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$

j) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

Solución: (Descripción de las gráficas)

a) $f(x)=(1-x)e^{-x}$ - Dominio: $\mathbb{R}$. - Cortes: $(1,0)$, $(0,1)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to\infty}(1-x)e^{-x}=0$. $\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}=\infty$. Asíntota horizontal $y=0$ para $x\to+\infty$. - Derivada: $f'(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{x}=(x-2)e^{-x}$. Cero en $x=0$. - Máximo en $x=2$. $f(2)=-e^{-2}$.
- Comportamiento: Decrede des de +∞ hasta el mínimo en (2, $-e^{-2}$), luego crece acercándose a 0 por debajo cuando x tiende a +∞

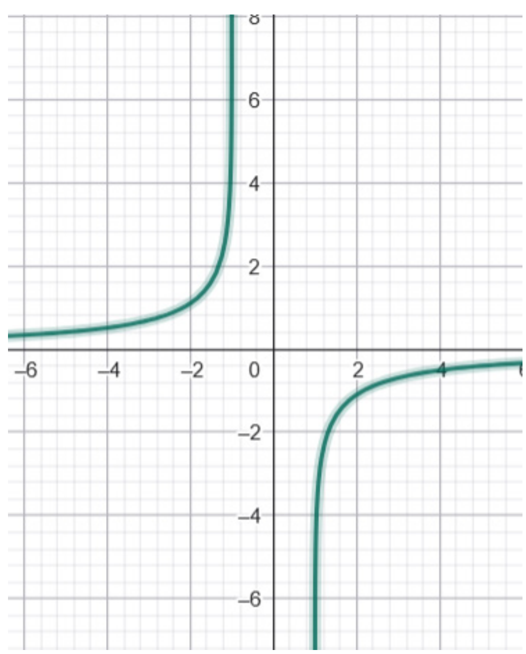
b) $f(x)=e^{1/x^2}$ - Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$. - Cortes: No corta los ejes. - Asíntotas: $\lim_{x\to\infty}e^{1/x^2}=1$. Asíntota horizontal $y=1$. $\lim_{x\to0^+}e^{1/x^2}=+\infty$. $\lim_{x\to0^-}e^{1/x^2}=+\infty$. Asíntota vertical $x=0$. - Derivada: $f'(x)=-2\dfrac{1}{x^3}e^{1/x^2}$. – Comportamiento: Creciente en (−∞,0)y(−∞,0), decreciente en (0,∞)y (0,∞). Viene de y=1 (para x→−∞), crece hacia +∞ cuando x→0−. Por la derecha, viene de +∞ (para x→0+), decrece hacia y=1 (para x→+∞)



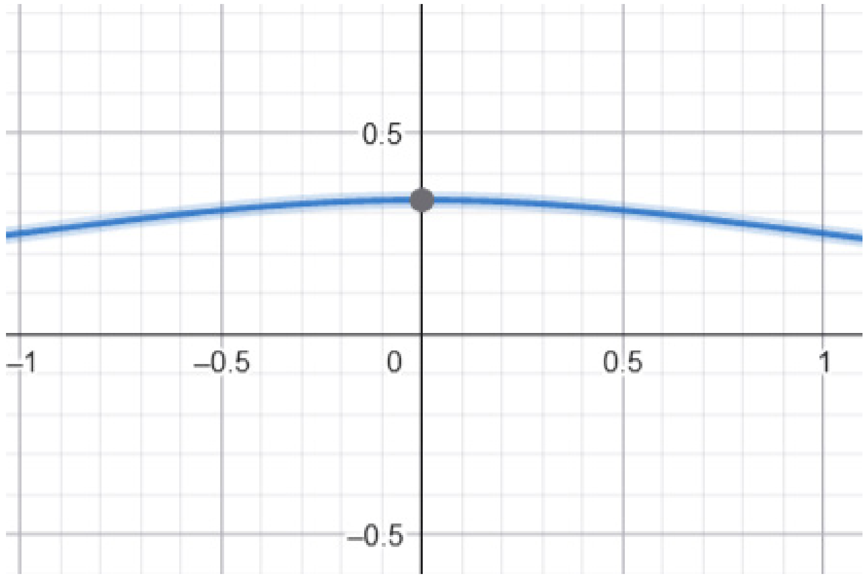
c) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ - Dominio: (−∞,−1)ℝ(1,∞). Cortes: No corta los ejes. Asíntotas: Asíntotas verticales: x=1 y x=−1. Asíntota horizontal: y=0y=0 (cuando x→±∞).

Derivada: $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$. Siempre positiva en el dominio.

Comportamiento: Creciente en todo su dominio. En (1,∞), viene de −∞−(para x→1) y se acerca a 0 por debajo. En (−∞,−1), viene de 0 por debajo (para x→-∞) y sube a +∞ (para x→-1^-).

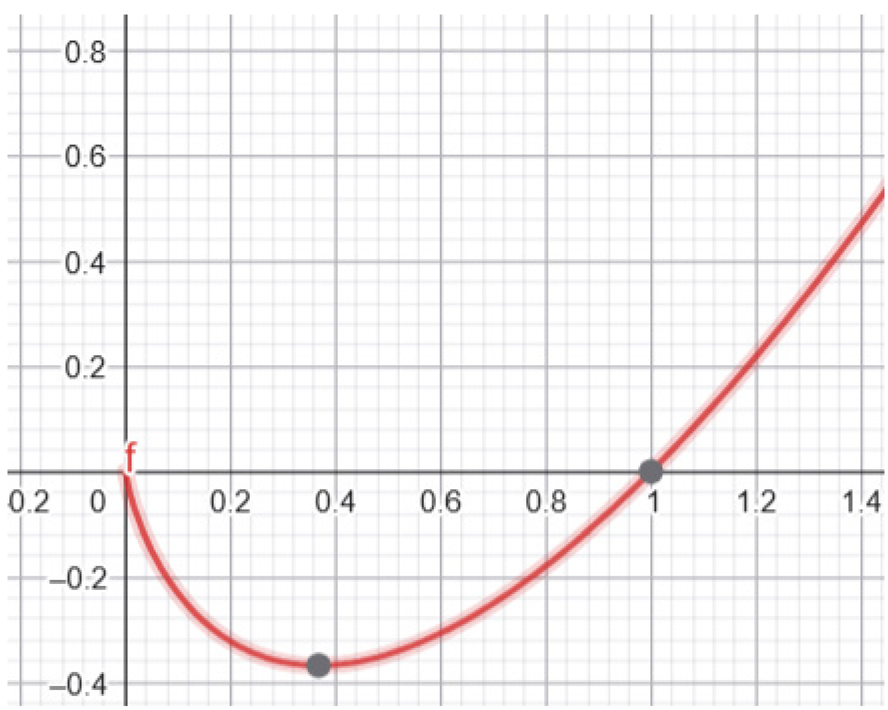


d) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$ - Dominio: ℝ. - Cortes: No corta el eje x. Corta el eje y en $(0,1/3)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+3}=0$. Asíntota horizontal $y=0$. - Derivada: $f'(x)=-\frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$. Cero en $x=0$. - Máximo en $x=0$. $f(0)=1/3$. - Comportamiento: Sube de $y=0$ (para $x\to-\infty$) hasta $(0,1/3)$, luego baja a $y=0$ (para $x\to\infty$).

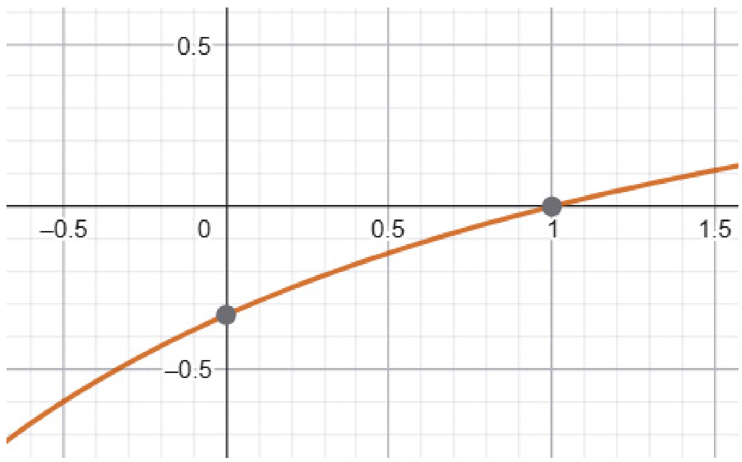


e) $f(x)=x\ln x$ - Dominio: $x>0$. - Cortes: $f(x)=0\Rightarrow x\ln x=0\Rightarrow x=1$ (ya que $x>0$).

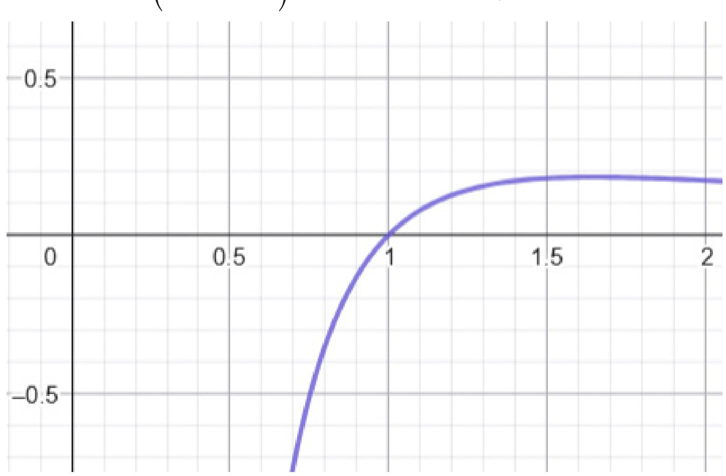
Punto $(1,0)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$ (indeterminación $0\cdot(-\infty)$, se resuelve con L'Hopital como $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$). No hay asíntota vertical. $\lim_{x\to\infty} x\ln x=\infty$. - Derivada: $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$. Cero en $\ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}=1/e$. - Mínimo en $x=1/e$. $f(1/e)=(1/e)\ln(1/e)=(1/e)(-1)=-1/e$. - Comportamiento: Empieza en $(0,0)$, baja hasta un mínimo en $(1/e,-1/e)$, luego sube pasando por $(1,0)$ a ∞.



f) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ - Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. - Cortes: $(1,0)$, $(0,-1/3)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to -3^-}\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{-4}{0^-}=\infty$. $\lim_{x\to -3^+}\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty$. Asíntota vertical $x=-3$. $\lim_{x\to \pm\infty}\dfrac{x-1}{x+3}=1$. Asíntota horizontal $y=1$. - Derivada: $f'(x)=\dfrac{1(x+3)-(x-1)(1)}{(x+3)^2}=\dfrac{x+3-x+1}{(x+3)^2}=\dfrac{4}{(x+3)^2}$. Siempre positiva. - Comportamiento: Creciente en todo su dominio. Viene de $y=1$ (para $x\to-\infty$), sube a ∞ (para $x\to-3^-$). Viene de $-\infty$ (para $x\to-3^+$), sube a $y=1$ (para $x\to\infty$).



g) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ - Dominio: $x>0$. - Cortes: $f(x)=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1$. Punto $(1,0)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{-\infty}{0^+}=-\infty$. Asíntota vertical $x=0$. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$. Asíntota horizontal $y=0$. - Derivada: $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ Cero en $1-2\ln x=0\Rightarrow \ln x=1/2\Rightarrow x=\sqrt{e}$. - Máximo en $x=\sqrt{e}$. $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{e}=\dfrac{1}{2e}$. - Comportamiento: Viene de $-\infty$ (para $x\to 0^+$), sube hasta un máximo en $\left(\sqrt{e},1/2e\right)$, luego baja a $y=0$ (para $x\to\infty$).



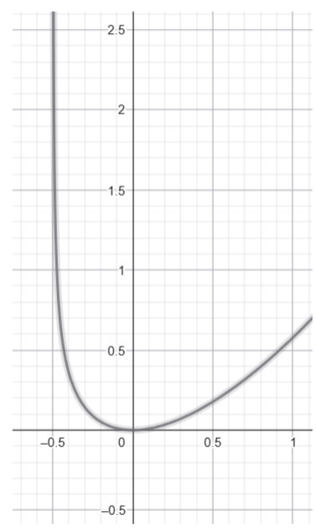
h) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+1}}$ - Dominio: $2x+1>0 \Rightarrow x>-1/2$. - Cortes: $f(x)=0 \Rightarrow x=0$. Punto $(0,0)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to -1/2^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1/4}{0^+}=\infty$.

Asíntota vertical $x=-1/2$. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x+1}}=\infty$. - Derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{2x+1}-x^2\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}\cdot 2}{2x+1}=\frac{2x(2x+1)-x^2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}=\frac{4x^2+2x-x^2}{(2x+1)^{3/2}}=\frac{3x^2+2x}{(2x+1)^{3/2}}=\frac{x(3x+2)}{(2x+1)^{3/2}}.$$

Ceros: $x=0$ o $3x+2=0 \Rightarrow x=-2/3$. Solo $x=0$ está en el dominio. - Mínimo en $x=0$.

$f(0)=0$. - Comportamiento: Viene de ∞ (para $x\to -1/2^+$), baja hasta un mínimo en $(0,0)$, luego sube a ∞.

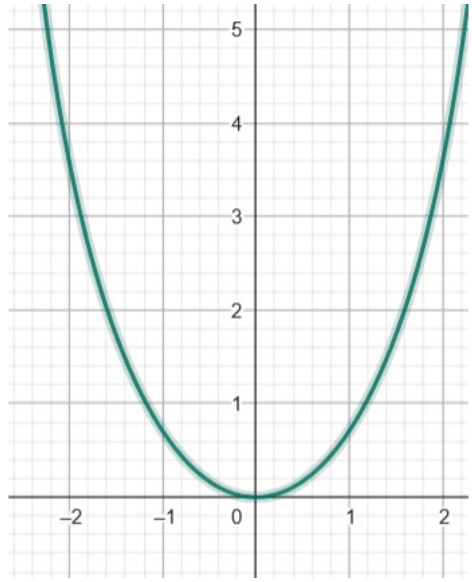


i) $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ - Dominio: $9-x^2>0 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow -3<x<3$.
- Cortes: $f(x)=0 \Rightarrow x=0$. Punto $(0,0)$. - Asíntotas: $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{18}{0^+}=\infty$.

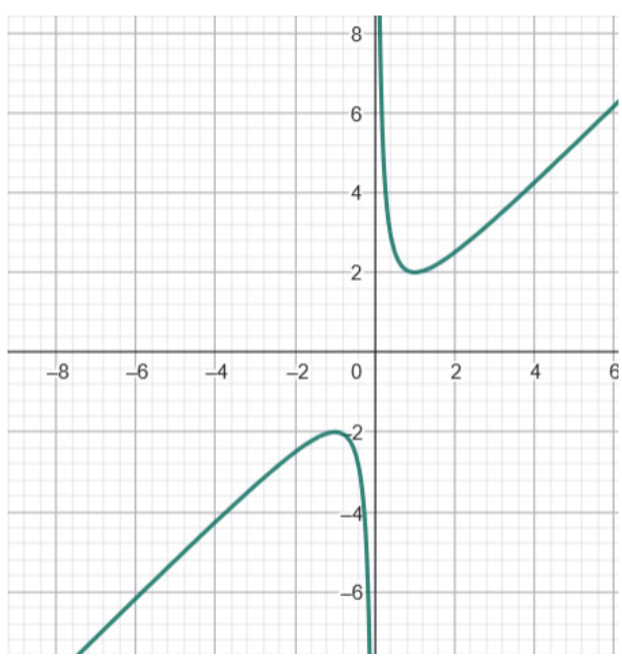
$\lim_{x\to -3^+} \dfrac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{18}{0^+}=\infty$. Asíntotas verticales $x=\pm 3$. - Derivada:

$$f'(x)=\frac{4x\sqrt{9-x^2}-2x^2\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2}=\frac{4x(9-x^2)+2x^3}{(9-x^2)^{3/2}}=\frac{36x-4x^3+2x^3}{(9-x^2)^{3/2}}=\frac{36x-2x^3}{(9-x^2)^{3/2}}=\frac{2x(18-x^2)}{(9-x^2)^{3/2}}$$

Ceros: $x=0$ o $18-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}$. Solo $x=0$ está en el dominio $(-3,3)$. - Mínimo en $x=0$. $f(0)=0$. - Comportamiento: Viene de ∞ (para $x\to -3^+$), baja hasta un mínimo en $(0,0)$, luego sube a ∞ (para $x\to 3^-$).

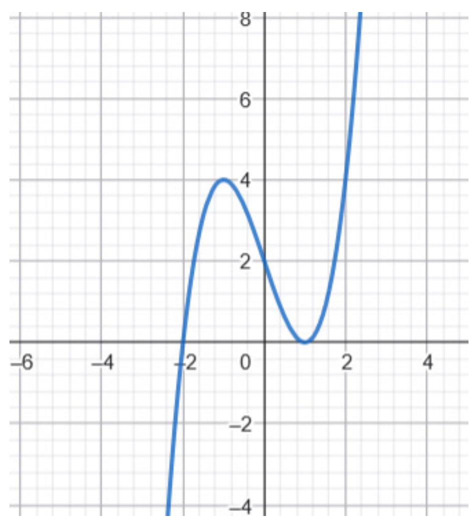


j) x$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ - Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. - Cortes: No corta el eje x. No corta el eje y. - Asíntotas: $\lim_{x\to 0^-}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$. $\lim_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$. Asíntota vertical $x=0$. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\pm\infty$. Asíntota oblicua $y=x$. - Derivada: $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$. Ceros: $1-\dfrac{1}{x^2}=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$. - Máximo en $x=-1$. $f(-1)=-1-1=-2$. - Mínimo en $x=1$. $f(1)=1+1=2$. - Comportamiento: Viene de $-\infty$ (para $x\to-\infty$), sube hasta un máximo en $(-1,-2)$, baja a $-\infty$ (para $x\to 0^-$). Viene de ∞ (para $x\to 0^+$), baja hasta un mínimo en $(1,2)$, luego sube a ∞ (para $x\to\infty$).



63. Dibuja la gráfica de una función que verifique: $f(-1)=4$, $f'(-1)=0$ $f(1)=0$, $f'(x)<0$, si $-1<x<1$ $f'(x)>0$, si $x<-1$ o $x>1$ $f''(x)>0$, si $x>0$ $f''(x)<0$, si $x<0$

Solución: (Descripción de la gráfica) - $f(-1)=4$ y $f'(-1)=0$: Hay un extremo en $(-1,4)$. - $f(1)=0$: Pasa por $(1,0)$. - $f'(x)<0$ en $(-1,1)$: Decreciente en $(-1,1)$. - $f'(x)>0$. en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$: Creciente en $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$. - De $f'(-1)=0$ y el cambio de signo de $f'(x)$, en $x=-1$ hay un máximo relativo. - En $x=1$, la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha, pero $f'(1)$ no es necesariamente 0. Si $f'(1)=0$, sería un mínimo. Si no, es un punto anguloso o un punto donde la derivada no existe. - $f''(x)>0$ en $(0,\infty)$: Cóncava en $(0,\infty)$. - $f''(x)<0$ en $(-\infty,0)$: Convexa en $(-\infty,0)$. - En $x=0$, hay un punto de inflexión.
Comportamiento general: La función viene de $-\infty$, sube hasta un máximo en $(-1,4)$. Luego baja, pasando por un punto de inflexión en $x=0$ (donde cambia de convexa a cóncava), y continúa bajando hasta $x=1$ donde pasa por $(1,0)$. Después de $x=1$, la función sube a ∞ y es cóncava.



64. Dibuja la gráfica de una función que verifique: $f'(x)<0$ en $(2,+\infty)$ $f'(x)>0$ en $(-\infty,2)$ $f''(x)<0$ en $(-4,4)$ $f''(x)>0$ en $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Solución: (Descripción de la gráfica) - $f'(x)<0$ en $(2,\infty)$ y $f'(x)>0$ en $(-\infty,2)$: - En $x=2$, hay un máximo relativo. - $f''(x)<0$ en $(-4,4)$: Convexa en $(-4,4)$. - $f''(x)>0$ en $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$: Cóncava en $(-\infty,-4)$ y $(4,\infty)$. - En $x=-4$ y $x=4$, hay puntos de inflexión. - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$: Asíntota horizontal $y=-4$ para $x\to-\infty$. - $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$: Asíntota horizontal $y=0$ para $x\to\infty$.
Comportamiento general: La función viene de la asíntota $y=-4$ (para $x\to-\infty$), es cóncava hasta $x=-4$. En $x=-4$ hay un punto de inflexión (cambia de cóncava a convexa). Luego es convexa hasta $x=4$. En $x=2$ alcanza un máximo relativo. En $x=4$ hay otro punto de inflexión (cambia de convexa a cóncava). Después de $x=4$, es cóncava y decrece, acercándose a la asíntota $y=0$ (para $x\to\infty$).

65. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^4+x^3-1$

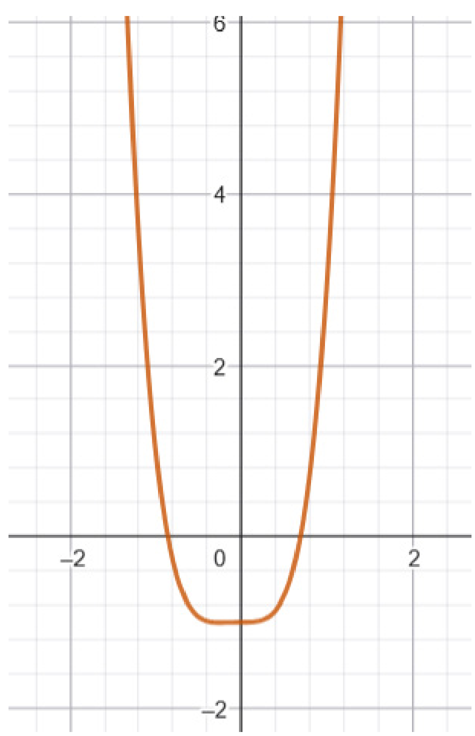
b) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

c) $f(x)=\frac{\boldsymbol{x}^2-1}{\boldsymbol{x}}$

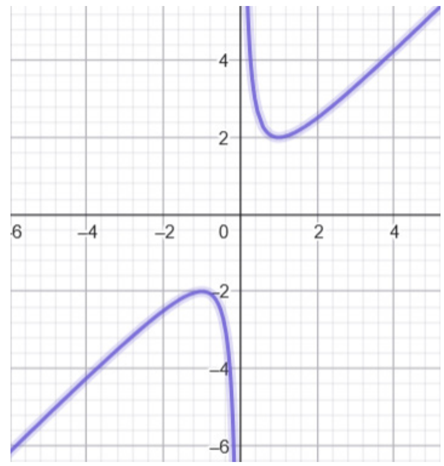
Solución: (Descripción de las gráficas)

a) $f(x)=3x^4+x^3-1$ - Dominio: $\mathbb{R}$.

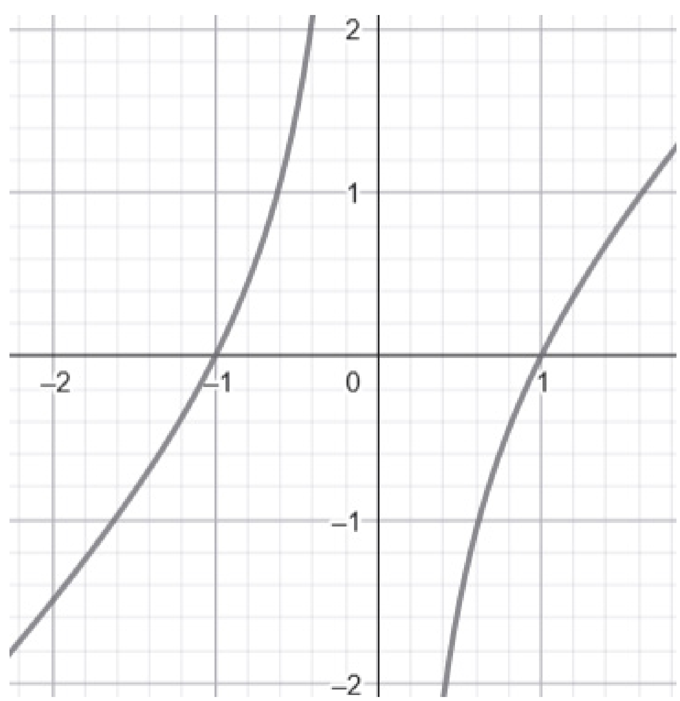
- Cortes: $f(0)=-1$. Para $f(x)=0$, hay dos raíces reales (una entre -1 y 0, otra entre 0 y 1). - Derivada primera: $f'(x)=12x^3+3x^2=3x^2(4x+1)$. Ceros: $x=0$ (raíz doble), $x=-1/4$. - Derivada segunda: $f''(x)=36x^2+6x=6x(6x+1)$. Ceros: $x=0, x=-1/6$. - Mínimo en $x=-1/4$. $f(-1/4)=3/256-1/64-1=(3-4-256)/256=-257/256\approx-1.004$. - En $x=0$, hay un punto de inflexión (cambia de convexa a cóncava). - Puntos de inflexión en $x=0$ y $x=-1/6$. - Comportamiento: Baja hasta un mínimo en $x=-1/4$, luego sube. En $x=0$ la pendiente es cero, pero sigue subiendo.



b) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ - Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$. - Cortes: No corta los ejes. - Asíntotas: $x=0$ (vertical), $y=x$ (oblicua). - Derivada: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$. Ceros en x=±1. - Comportamiento: Creciente en (−∞,−1)(1,∞), decreciente en (−1,0)(0,1). Máximo en (−1,−2), mínimo en (1,2). Viene de la asíntota y=x (por debajo) cuando x→−∞, sube al máximo, baja a −∞ en 0^{-}. Por la derecha, viene de +∞ en 0^{+}, baja al mínimo, luego crece acercándose a y=x cuando x→∞.



c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. Dominio $\mathbb{R}-\{0\}$. -Cortes: puntos(-1,0) y (1,0). -Asíntotas: x=0 (vertical), y=x (oblicua).- Derivada: $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ .Siempre positiva Comportamiento: Creciente en su dominio.



66. Dadas las siguientes funciones: $f(x)=\dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$ $g(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$ $h(x)=\dfrac{3x^2-27}{x^2+x-2}$

a) Halla el dominio y los puntos de corte.

b) Calcula, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.

d) A partir de los resultados de los apartados anteriores, efectúa una representación gráfica.

Solución: Para $f(x)=\dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$:

a) **Dominio:** Denominador $x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0$. $x=4, x=-2$.

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$. **Puntos de corte:** - Eje y: $f(0)=\dfrac{-36}{-8}=\dfrac{9}{2}$. Punto $(0,9/2)$. - Eje x:

$4x^2-36=0 \Rightarrow 4x^2=36 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$. Puntos $(-3,0),(3,0)$.

b) **Asíntotas:** - Verticales: $x=-2, x=4$.

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\dfrac{4(x-3)(x+3)}{(x-4)(x+2)}=\dfrac{4(-5)(1)}{(-6)(0^-)}=\dfrac{-20}{0^+}=-\infty$. $\lim_{x\to-2^+} f(x)=\dfrac{-20}{0^-}=\infty$

. $\lim_{x\to4^-} f(x)=\dfrac{4(1)(7)}{(0^-)(6)}=\dfrac{28}{0^-}=-\infty$. $\lim_{x\to4^+} f(x)=\dfrac{28}{0^+}=\infty$. - Horizontales:

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=4$. Asíntota $y=4$.

c) **Crecimiento y decrecimiento, extremos relativos:**

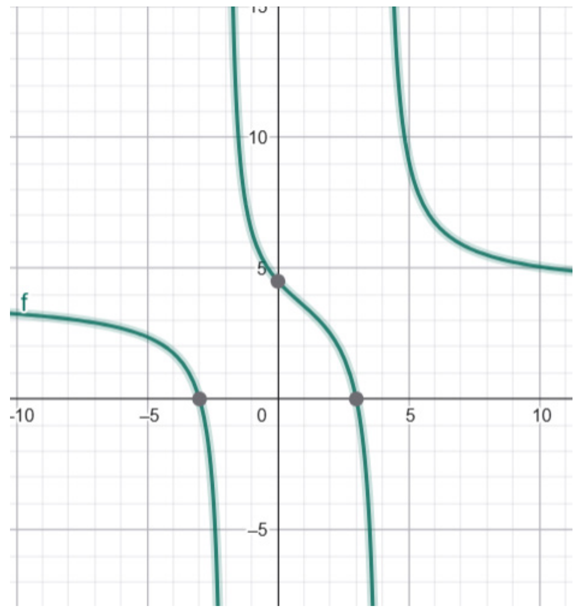
$$f'(x)=\frac{8x(x^2-2x-8)-(4x^2-36)(2x-2)}{(x^2-2x-8)^2}=\frac{8x^3-16x^2-64x-(8x^3-8x^2-72x+72)}{(x^2-2x-8)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{8x^3-16x^2-64x-8x^3+8x^2+72x-72}{(x^2-2x-8)^2}=\dfrac{-8x^2+8x-72}{(x^2-2x-8)^2}=\dfrac{-8(x^2-x+9)}{(x^2-2x-8)^2}$. El numerador

x^2-x+9 tiene discriminante $1-4(9)=-35<0$, por lo que es siempre positivo. Como el numerador es $-8\cdot(\text{ positivo})$ y el denominador es $(\text{ positivo})^2$, $f'(x)$ es siempre negativa. La función es decreciente en todo su dominio. No tiene extremos relativos.

d) **Representación gráfica:** (Descripción de la gráfica) - Asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=4$.

Asíntota horizontal en $y=4$. - Pasa por $(-3,0)$, $(0,9/2)$, $(3,0)$. - Siempre decreciente. - Viene de $y=4$ (para $x\to-\infty$), baja a $-\infty$ (para $x\to-2^-$). - Viene de ∞ (para $x\to-2^+$), pasa por $(-3,0)$, $(0,9/2)$, $(3,0)$, baja a $-\infty$ (para $x\to4^-$). - Viene de ∞ (para $x\to4^+$), baja a $y=4$ (para $x\to\infty$).



Para $g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$:

a) **Dominio:** Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **Puntos de corte:** - (0,0

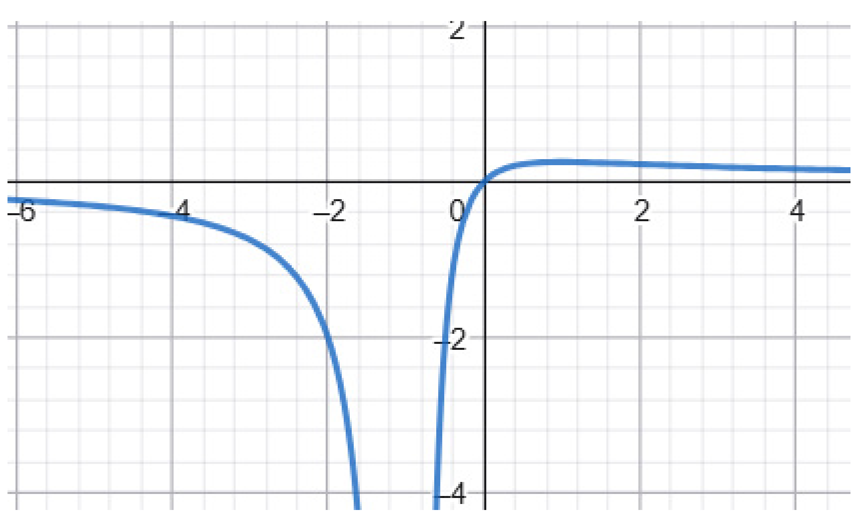
b) **Asíntotas:** - Verticales: $x=-1$. - Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}\right)$=0. y=0.

c) **Crecimiento y decrecimiento, extremos relativos:** $g'(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^3}$. Igualamos $g'(x)=0$:

$-x+1=0$. $x=1$- Para $x<-1$: $g'(x)<0$. Decreciente. - Para $-1<x<1$: $g'(x)>0$. Creciente. -

Para $x>1$: $g'(x)<0$. Decreciente. – En x=1: Máximo relativo.

d) **Representación gráfica:** (Descripción de la gráfica) - Asíntota vertical en $x=-1$. Asíntota horizontal $y=0$. – Corta a los ejes en (0,0). - Máximo relativo en x=1



Para h(x)=$\dfrac{3x^2-27}{x^2+x-2}$:

a) **Dominio:** : $\mathbb{R}-\{-2,1\}$. **Puntos de corte:** - Eje y: $h(0)=\dfrac{27}{2}$. Punto $(0,27/2)$. - Eje x:

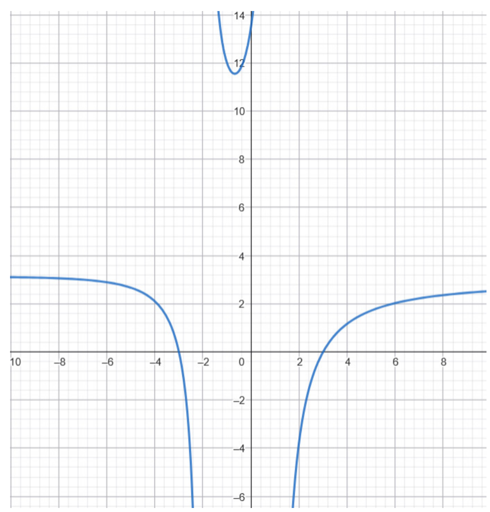
$3x^2-27=0 \Rightarrow 3x^2=27 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$. Puntos $(-3,0),(3,0)$.

b) **Asíntotas:** - Verticales: $x=-2, x=1$. - Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2-27}{x^2+x-2}=3$. Asíntota $y=3$.

c) **Crecimiento y decrecimiento, extremos relativos:** $h'(x)=\dfrac{3(x^2+14x+9)}{(x^2+x-2)^2}$. Igualamos

$h'(x)=0$: $x_1=-7-2\sqrt{10}$, $x_2=-7+2\sqrt{10}$ son los puntos críticos. Analizamos el signo de $h'(x)$: - Para $x<-7+2\sqrt{10}$: $h'(x)<0$. Decreciente. - Para $x>-7+2\sqrt{10}$: $h'(x)>0$. Creciente. - En x= $-7+2\sqrt{10}$ Mínimo relativo

d) **Representación gráfica:** (Descripción de la gráfica) - Asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=1$. Asíntota horizontal en $y=3$. - Pasa por $(0,27/2)$, (-3,0), $(3,0)$. - Mínimo relativo en x $=-7+2\sqrt{10}$.



67. Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Determina el dominio y sus asíntotas.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función alcanza un máximo en el punto de abscisa $x=1$? Justifica la respuesta.

c) Esboza su gráfica.

Solución:

a) **Dominio:** Denominador $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$. Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Asíntotas: - Verticales: $x=1$. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty$. - Horizontales:

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\pm\infty$. No hay. - Oblicuas: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$

. $n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)^2}=$

$=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2$. Asíntota oblicua $y=x+2$.

b) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=\dfrac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.

Igualamos $f'(x)=0$: $x^2(x-3)=0\Rightarrow x=0$ (raíz doble), $x=3$. Analizamos el signo de $f'(x)$:

- Para $x<0$: $x^2>0$, $x-3<0$, $(x-1)^3<0$. $f'(x)=\dfrac{(+)(-)}{(-)}=+$. Creciente. - Para $0<x<1$: $x^2>0$

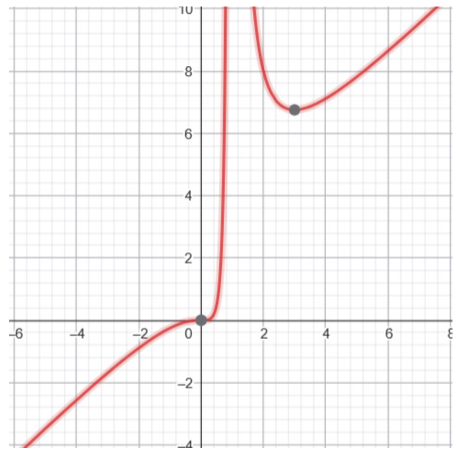
, $x-3<0$, $(x-1)^3<0$. $f'(x)=\dfrac{(+)(-)}{(-)}=+$. Creciente. - Para $1<x<3$: $x^2>0$, $x-3<0$,

$(x-1)^3>0$. $f'(x)=\dfrac{(+)(-)}{(+)}=-$. Decreciente. - Para $x>3$: $x^2>0$, $x-3>0$, $(x-1)^3>0$.

$f'(x)=\dfrac{(+)(+)}{(+)}=+$. Creciente. - En $x=0$: $f'(x)$ no cambia de signo. No es un extremo

relativo. - En $x=3$: Mínimo relativo. $f(3)=\dfrac{3^3}{(3-1)^2}=\dfrac{27}{4}$. ¿**La función alcanza un máximo en el punto de abscisa** $x=1$? No, la función no está definida en $x=1$, por lo que no puede alcanzar ningún valor en ese punto. Además, en $x=1$ hay una asíntota vertical.

c) **Esbozo de su gráfica:** (Descripción de la gráfica) - Asíntota vertical $x=1$. Asíntota oblicua $y=x+2$. - Corta el eje x en $(0,0)$. - Mínimo relativo en $(3,27/4)$. - Viene de $-\infty$ (para $x\to-\infty$), sube pasando por $(0,0)$, sube a ∞ (para $x\to 1^-$). - Viene de ∞ (para $x\to 1^+$), baja hasta el mínimo en $(3,27/4)$, luego sube a ∞ (para $x\to\infty$), acercándose a la asíntota $y=x+2$.



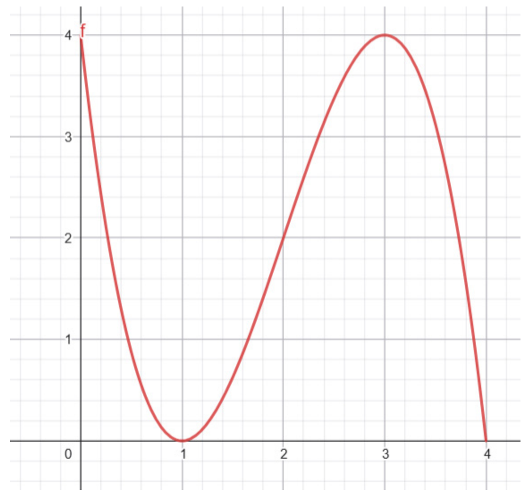
68. Dada la función $f(x)=(4-x)(x-1)^2$, $0\le x\le 4$. a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos. b) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión. c) Representa gráficamente la función.

Solución:

a) **Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos:** Dominio: $[0,4]$. $f(x)=(4-x)(x^2-2x+1)=4x^2-8x+4-x^3+2x^2-x=-x^3+6x^2-9x+4$. Primera derivada: $f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x^2-4x+3)=-3(x-1)(x-3)$. Igualamos $f'(x)=0$: $x=1, x=3$. Analizamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(0,1)$, $(1,3)$, $(3,4)$. - Para $0<x<1$ (e.g., $x=0.5$): $f'(0.5)=-3(0.5-1)(0.5-3)=-3(-0.5)(-2.5)=-3.75<0$. Decreciente. - Para $1<x<3$ (e.g., $x=2$): $f'(2)=-3(2-1)(2-3)=-3(1)(-1)=3>0$. Creciente. - Para $3<x<4$ (e.g., $x=3.5$): $f'(3.5)=-3(3.5-1)(3.5-3)=-3(2.5)(0.5)=-3.75<0$. Decreciente. - En $x=1$: Mínimo relativo. $f(1)=(4-1)(1-1)^2=0$. - En $x=3$: Máximo relativo. $f(3)=(4-3)(3-1)^2=1(2)^2=4$. Valores en los extremos del intervalo: $f(0)=(4-0)(0-1)^2=4(1)=4$. $f(4)=(4-4)(4-1)^2=0$. **Respuesta a):** - Intervalos de crecimiento: $(1,3)$. - Intervalos de decrecimiento: $(0,1)$ y $(3,4)$. - Mínimo relativo en $(1,0)$. - Máximo relativo en $(3,4)$.

b) **Concavidad y convexidad, puntos de inflexión:** Segunda derivada: $f''(x)=-6x+12=-6(x-2)$. Igualamos $f''(x)=0$: $x=2$. Analizamos el signo de $f''(x)$ en los intervalos $(0,2)$, $(2,4)$. - Para $0<x<2$ (e.g., $x=1$): $f''(1)=-6(1-2)=6>0$. Cóncava. - Para $2<x<4$ (e.g., $x=3$): $f''(3)=-6(3-2)=-6<0$. Convexa. - En $x=2$: Punto de inflexión. $f(2)=(4-2)(2-1)^2=2(1)^2=2$. **Respuesta b):** - Cóncava en $(0,2)$. - Convexa en $(2,4)$. - Punto de inflexión en $(2,2)$.

c) **Representación gráfica:** (Descripción de la gráfica) - Pasa por $(0,4)$, $(1,0)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,0)$. - Comienza en $(0,4)$, baja hasta un mínimo en $(1,0)$, sube pasando por un punto de inflexión en $(2,2)$, alcanza un máximo en $(3,4)$, y luego baja hasta $(4,0)$.



Extremos absolutos. Optimización

69. Hllos extremos absolutos de: **a)** $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ en $[0,4]$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en $[0,2]$

Solución:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ en $[0,4]$ La función es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$. Primera derivada: $f'(x) = 4x - 5$. Igualamos $f'(x) = 0$: $4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4}$. Este punto crítico está en el intervalo $[0,4]$. Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: - $f(0) = 2(0)^2 - 5(0) + 2 = 2$. - $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\dfrac{5}{4}\right) + 2 = 2\left(\dfrac{25}{16}\right) - \dfrac{25}{4} + 2 = \dfrac{25}{8} - \dfrac{50}{8} + \dfrac{16}{8} = \dfrac{-9}{8} = -1.125$. - $f(4) = 2(4)^2 - 5(4) + 2 = 2(16) - 20 + 2 = 32 - 20 + 2 = 14$. El valor máximo es 14 y el valor mínimo es $-\dfrac{9}{8}$. **Respuesta a):** - Máximo absoluto en $x = 4$ con valor $f(4) = 14$. - Mínimo absoluto en $x = \dfrac{5}{4}$ con valor $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{9}{8}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en $[0,2]$ La función es continua en el intervalo cerrado $[0,2]$. Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Igualamos $f'(x) = 0$: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Solo $x = 1$ está en el intervalo $[0,2]$. Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: - $f(0) = \dfrac{0}{0^2+1} = 0$. - $f(1) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$. - $f(2) = \dfrac{2}{2^2+1} = \dfrac{2}{5}$. El valor máximo es $\dfrac{1}{2}$ y el valor mínimo es 0. **Respuesta b):** - Máximo absoluto en $x = 1$ con valor $f(1) = \dfrac{1}{2}$. - Mínimo absoluto en $x = 0$ con valor $f(0) = 0$.

70. Determina el punto de la curva $y = \sqrt{2x}$ más próximo al punto $(1,4)$.

Solución:

Sea un punto de la curva $P\left(x, \sqrt{2x}\right)$. Queremos minimizar la distancia al punto $Q(1,4)$.

La distancia al cuadrado es $D^2 = (x-1)^2 + \left(\sqrt{2x}-4\right)^2$. Minimizar D^2 es equivalente a minimizar

D. Sea $g(x) = (x-1)^2 + \left(\sqrt{2x}-4\right)^2$. $g(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 8\sqrt{2x} + 16 = x^2 + 17 - 8\sqrt{2x}$.

Dominio: $x \geq 0$. Calculamos la derivada de $g(x)$: $g'(x) = 2x - 8 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = 2x - \dfrac{8}{\sqrt{2x}}$.

Igualamos $g'(x) = 0$: $2x - \dfrac{8}{\sqrt{2x}} = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{8}{\sqrt{2x}} \Rightarrow 2x\sqrt{2x} = 8 \Rightarrow x\sqrt{2x} = 4$. Elevamos

al cuadrado: $\left(x\sqrt{2x}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2(2x) = 16 \Rightarrow 2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Para verificar que es

un mínimo, podemos usar la segunda derivada o analizar el signo de $g'(x)$.

$g'(x) = 2x - 8(2x)^{-1/2}$. $g''(x) = 2 - 8\left(-\dfrac{1}{2}\right)(2x)^{-3/2} \cdot 2 = 2 + 8(2x)^{-3/2} = 2 + \dfrac{8}{(2x)\sqrt{2x}}$.

Para $x = 2$, $g''(2) = 2 + \dfrac{8}{4\sqrt{4}} = 2 + \dfrac{8}{8} = 2 + 1 = 3 > 0$. Es un mínimo. El punto de la curva es

$P\left(2, \sqrt{2(2)}\right) = P\left(2, \sqrt{4}\right) = P(2,2)$. **Respuesta:** El punto de la curva más próximo es $(2,2)$.

71. De todos los rectángulos de 20 cm de perímetro, determina el que tenga diagonal mínima.

Solución:

Sean l y w las dimensiones del rectángulo. Perímetro: $2l + 2w = 20 \Rightarrow l + w = 10 \Rightarrow w = 10 - l$
. La diagonal d está dada por $d = \sqrt{l^2 + w^2}$. Minimizar d es equivalente a minimizar d^2. Sea
$f(l) = l^2 + (10-l)^2$. $f(l) = l^2 + 100 - 20l + l^2 = 2l^2 - 20l + 100$.
Dominio: $0 < l < 10$. Calculamos la derivada de $f(l)$: $f'(l) = 4l - 20$. Igualamos $f'(l) = 0$:
$4l - 20 = 0 \Rightarrow 4l = 20 \Rightarrow l = 5$. Calculamos la segunda derivada: $f''(l) = 4$. Como $f''(5) = 4 > 0$,
es un mínimo. Si $l = 5$, entonces $w = 10 - 5 = 5$. El rectángulo es un cuadrado de lado 5 cm.
Respuesta: El rectángulo que tiene diagonal mínima es un cuadrado de lado 5 cm.

72. Halla el punto de la curva $y = 4 - x^2$ en el que su tangente determina, en el primer cuadrante, un triángulo de área máxima con los ejes de coordenadas.

Solución:

Sea el punto de tangencia $P(x_0, y_0)$, donde $y_0 = 4 - x_0^2$. La derivada de la curva es $y' = -2x$.
La pendiente de la recta tangente en $P(x_0, y_0)$ es $m = -2x_0$. La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$: $y - \left(4 - x_0^2\right) = -2x_0(x - x_0)$. Para que el triángulo esté en el primer cuadrante, necesitamos que la recta tangente tenga pendiente negativa, y que los puntos de corte con los ejes sean positivos. x_0 debe ser positivo para que la pendiente sea

negativa. $y_0 = 4 - x_0^2$ debe ser positivo, así que $x_0^2 < 4 \Rightarrow -2 < x_0 < 2$. Entonces, $0 < x_0 < 2$.
Punto de corte con el eje y (hacemos $x = 0$):

$y - \left(4 - x_0^2\right) = -2x_0\left(0 - x_0\right) \Rightarrow y - 4 + x_0^2 = 2x_0^2 \Rightarrow y = x_0^2 + 4$. Punto de corte con el eje x (hacemos $y = 0$): $0 - \left(4 - x_0^2\right) = -2x_0\left(x - x_0\right) \Rightarrow -\left(4 - x_0^2\right) = -2x_0x + 2x_0^2 \Rightarrow 2x_0x = 2x_0^2 + 4 - x_0^2 = x_0^2 + 4$. $x = \dfrac{x_0^2 + 4}{2x_0}$.

El área del triángulo es $A\left(x_0\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\text{base}\right) \cdot \left(\text{altura}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x_0^2 + 4}{2x_0} \cdot \left(x_0^2 + 4\right) = \dfrac{\left(x_0^2 + 4\right)^2}{4x_0}$.

Dominio: $0 < x_0 < 2$. Calculamos la derivada de $A\left(x_0\right)$:

$$A'\left(x_0\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\left(x_0^2 + 4\right)\left(2x_0\right)x_0 - \left(x_0^2 + 4\right)^2(1)}{x_0^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x_0^2\left(x_0^2 + 4\right) - \left(x_0^2 + 4\right)^2}{x_0^2}$$

$A'\left(x_0\right) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\left(x_0^2 + 4\right)\left[4x_0^2 - \left(x_0^2 + 4\right)\right]}{x_0^2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\left(x_0^2 + 4\right)\left(3x_0^2 - 4\right)}{x_0^2}$. Igualamos $A'\left(x_0\right) = 0$: Como

$x_0^2 + 4$ es siempre positivo, y x_0^2 es positivo en el dominio, necesitamos $3x_0^2 - 4 = 0$.

$3x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

73. Sea $f : \left[0, 2\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f\left(x\right) = \begin{cases} 1 - e^x, & \text{si} 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 - e, & \text{si} 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

Halla los extremos absolutos.

Solución:

Dominio: $\left[0, 2\right]$. **Continuidad en** $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f\left(x\right) = \lim_{x \to 1^-} \left(1 - e^x\right) = 1 - e^1 = 1 - e \approx -1.718$.
$\lim_{x \to 1^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to 1^+} \left(2x - 1 - e\right) = 2\left(1\right) - 1 - e = 1 - e$.
$f\left(1\right) = 2\left(1\right) - 1 - e = 1 - e$. La función es continua en $x = 1$, por lo tanto, es continua en todo el intervalo $\left[0, 2\right]$.
Puntos críticos: Derivadas de cada rama: $f'\left(x\right) = \begin{cases} -e^x, & \text{si} 0 < x < 1 \\ 2, & \text{si} 1 < x < 2 \end{cases}$ 1. Donde $f'\left(x\right) = 0$:

- $-e^x = 0$: No tiene solución. - $2 = 0$: No tiene solución. 2. Donde $f'\left(x\right)$ no existe: En $x = 1$.
$f'\left(1^-\right) = -e^1 = -e \approx -2.718$. $f'\left(1^+\right) = 2$. Como $f'\left(1^-\right) \ne f'\left(1^+\right)$, la función no es derivable en $x = 1$. Así, $x = 1$ es un punto crítico.
Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: -
$f\left(0\right) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$. - $f\left(1\right) = 1 - e \approx -1.718$. - $f\left(2\right) = 2\left(2\right) - 1 - e = 4 - 1 - e = 3 - e \approx 0.282$.
Comparamos los valores: $0, 1 - e, 3 - e$. $1 - e$ es el valor más pequeño. $3 - e$ es el valor más grande. **Respuesta:** - Máximo absoluto en $x = 2$ con valor $f\left(2\right) = 3 - e$. - Mínimo absoluto en $x = 1$ con valor $f\left(1\right) = 1 - e$.

74. Sea $g\left(x\right) = x - \sin x$, con $x \in \mathbb{R}$. a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento. b) Obtén los máximos y mínimos absolutos en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:** Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada:

$g'(x) = 1 - \cos x$. Igualamos $g'(x) = 0$: $1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1$. Las soluciones son $x = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Analizamos el signo de $g'(x)$: Como $\cos x \leq 1$, entonces $1 - \cos x \geq 0$. Esto significa que $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La función es siempre creciente. **Respuesta a):** La función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) **Máximos y mínimos absolutos en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:** Como la función es siempre creciente en $\mathbb{R}$, y por lo tanto en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, los extremos absolutos se encuentran en los límites del intervalo. - Mínimo absoluto en $x = -\frac{\pi}{2}$:

$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - (-1) = 1 - \frac{\pi}{2} \approx 1 - 1.57 = -0.57$.

- Máximo absoluto en $x = \frac{\pi}{2}$: $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1.57 - 1 = 0.57$. **Respuesta b):** - Mínimo absoluto en $x = -\frac{\pi}{2}$ con valor $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$. - Máximo absoluto en $x = \frac{\pi}{2}$ con valor $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$.

75. Sea $p(t) = 0{,}15 + \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ el precio del kilovatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$. Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo.

Solución:

Dominio: $[0,1]$. Sea $u = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$. Entonces $\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1 - u^2$. La función se convierte en $p(t) = 0.15 + (1 - u^2)u = 0.15 + u - u^3$.

Donde $u = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$. Cuando $t \in [0,1]$, $\frac{\pi t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En este intervalo, $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ va de $\cos(0) = 1$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Así, $u \in [0,1]$. Sea $f(u) = 0.15 + u - u^3$ para $u \in [0,1]$. $f'(u) = 1 - 3u^2$. Igualamos $f'(u) = 0$: $1 - 3u^2 = 0 \Rightarrow 3u^2 = 1 \Rightarrow u^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ya que $u \in [0,1]$). Evaluamos $f(u)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo $[0,1]$ para u: - $f(0) = 0.15 + 0 - 0 = 0.15$.

- $f(1) = 0.15 + 1 - 1 = 0.15$. - $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.15 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 0.15 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27} = 0.15 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} =$ $0.15 + \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{9} = 0.15 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.15 + \frac{2(1.732)}{9} \approx 0.15 + 0.385 = 0.535$. El máximo de $f(u)$ es 0.535 en $u = \frac{\sqrt{3}}{3}$. El mínimo de $f(u)$ es 0.15 en $u = 0$ y $u = 1$.

Ahora, convertimos estos valores de u a t: - $u = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$: $\frac{\pi t}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0.955$ rad.

$t = \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx \frac{2}{3.1416}(0.955) \approx 0.608$ horas. En este instante, el precio es máximo.

- $u = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0$: $\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. En este instante, el precio es mínimo.

- $u = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1$: $\frac{\pi t}{2} = 0 \Rightarrow t = 0$. En este instante, el precio es mínimo. **Respuesta:** - El precio es máximo en $t = \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0.608$ horas. - El precio es mínimo en $t = 0$ y $t = 1$ horas.

76. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3, pero que tenga la mínima superficie. a) Determina la función $S(x)$ que da la superficie del envase, donde x es el lado de la base cuadrada. b) Calcula, razonadamente, las dimensiones del envase que minimizan su superficie. c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2.

Solución:

a) **Función de superficie:** Sea x el lado de la base cuadrada y h la altura del prisma. Volumen: $V = x^2 h = 1\ dm^3$. Entonces $h = \frac{1}{x^2}$. La superficie total S es la suma del área de las dos bases y las cuatro caras laterales: $S(x) = 2x^2 + 4xh$. Sustituimos $h = \frac{1}{x^2}$: $S(x) = 2x^2 + 4x\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{4}{x}$. Dominio: $x > 0$. **Respuesta a):** $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.

b) **Dimensiones que minimizan la superficie:** Calculamos la primera derivada de $S(x)$: $S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$. Igualamos $S'(x) = 0$: $4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$. Calculamos la segunda derivada: $S''(x) = 4 - 4(-2)x^{-3} = 4 + \frac{8}{x^3}$. Evaluamos $S''(1)$: $S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$

. Es un mínimo. Si $x=1$ dm, entonces $h=\frac{1}{1^2}=1$ dm. **Respuesta b):** Las dimensiones que minimizan la superficie son $x=1$ dm (lado de la base) y $h=1$ dm (altura). Es un cubo.

c) **Superficie y coste:** La superficie mínima es $S(1)=2(1)^2+\frac{4}{1}=2+4=6$ dm ^{2}. El coste es $6\,\text{dm}^2\times 5$ euros/dm$^2=30$ euros. **Respuesta c):** La superficie de cada envase es 6 dm ^{2}, y su coste es 30 euros.

77. En una almazara el coste total (en euros) que supone la producción de x toneladas de determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función: $C(x)=2x^4-48x^3+360x^2-600x,\ 5\leq x\leq 13$. Determina, justificando la respuesta: a) La función que proporciona el coste medio por tonelada (coste unitario). b) La cantidad de toneladas que han de producirse para alcanzar los costes unitarios mínimo y máximo. c) Los costes unitarios máximo y mínimo que puede tener la almazara.

Solución:

a) **Función de coste medio (coste unitario):** El coste medio es $CM(x)=\frac{C(x)}{x}$. $CM(x)=\frac{2x^4-48x^3+360x^2-600x}{x}=2x^3-48x^2+360x-600$. **Respuesta a):** $CM(x)=2x^3-48x^2+360x-600$.

b) **Cantidad de toneladas para costes unitarios mínimo y máximo:** Minimizamos y maximizamos $CM(x)$ en el intervalo $[5,13]$. Calculamos la derivada de $CM(x)$: $CM'(x)=6x^2-96x+360$. Igualamos $CM'(x)=0$: $6x^2-96x+360=0\Rightarrow x^2-16x+60=0$. $(x-6)(x-10)=0$. Los puntos críticos son $x=6$ y $x=10$. Ambos están en el intervalo $[5,13]$. Evaluamos $CM(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: - $CM(5)=2(5)^3-48(5)^2+360(5)-600=2(125)-48(25)+1800-600=250-1200+1800-600=250$

. - $CM(6)=2(6)^3$

$-48(6)^2+360(6)-600=2(216)-48(36)+2160-600=432-1728+2160-600=264$.

- $CM(10)=2(10)^3-48(10)^2+360(10)-600=2000-4800+3600-600=200$

. - $CM(13)=2(13)^3-$

$-48(13)^2+360(13)-600=2(2197)-48(169)+4680-600=4394-8112+4680-600=362$.

Respuesta b): - Para el coste unitario mínimo, se deben producir 10 toneladas. - Para el coste unitario máximo, se deben producir 13 toneladas.

c) **Costes unitarios máximo y mínimo:** De los valores calculados en b): - Mínimo: $CM(10)=200$ euros/tonelada. - Máximo: $CM(13)=362$ euros/tonelada. **Respuesta c):** El coste unitario mínimo es 200 euros/tonelada y el máximo es 362 euros/tonelada.

78. Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

Solución:

Sean los dos números x e y. Condición: $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$. Dominio: $x\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 1$. Queremos maximizar el producto de uno por la raíz cuadrada del otro. Hay dos posibilidades: 1. $P_1(x)=x\sqrt{y}=x\sqrt{1-x}$. 2. $P_2(x)=y\sqrt{x}=(1-x)\sqrt{x}$.

Consideremos $P_1(x)=x\sqrt{1-x}$ en $[0,1]$.

$P_1'(x)=1\sqrt{1-x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)=\sqrt{1-x}-\frac{x}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. Igualamos $P_1'(x)=0$: $2-3x=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$. Este punto crítico está en el intervalo $[0,1]$. Evaluamos $P_1(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: - $P_1(0)=0\sqrt{1-0}=0$. - $P_1(1)=1\sqrt{1-1}=0$. - $P_1\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$. El máximo para $P_1(x)$ es $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Consideremos $P_2(x)=(1-x)\sqrt{x}$ en $[0,1]$. $P_2'(x)=-1\sqrt{x}+(1-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-2x+(1-x)}{2\sqrt{x}}=\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$.

Igualamos $P_2'(x)=0$: $1-3x=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$. Este punto crítico está en el intervalo $[0,1]$.

Evaluamos $P_2(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: - $P_2(0)=(1-0)\sqrt{0}=0$. - $P_2(1)=(1-1)\sqrt{1}=0$. - $P_2\left(\frac{1}{3}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$. El máximo para $P_2(x)$ es $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ambas opciones dan el mismo valor máximo. Para $P_1(x)$, si $x=\frac{2}{3}$. , entonces $y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Los números son $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. Para $P_2(x)$, si $x=\frac{1}{3}$, entonces $y=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Los números son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

Respuesta: Los dos números son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

Regla de L´Hopital

79. Utiliza, cuando proceda, la regla de L'Hopital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ **b)** $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$ **c)** $\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ Es una indeterminación de tipo $\infty-\infty$. La transformamos en $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

Aplicamos L'Hopital (forma $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{1\sin x+x\cos x}$$

Sigue siendo $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hopital de nuevo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + (1\cos x - x\sin x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{-\sin 0}{2\cos 0 - 0\sin 0} = \frac{0}{2-0} = 0$$

Respuesta a): 0.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$ Es una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Podemos dividir por la mayor potencia de x en el denominador, o aplicar L'Hopital. Dividiendo por x^2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}/x^2}{(9x^2+5)/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(2x^2+1)/x^4}}{9+5/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2/x^2+1/x^4}}{9+5/x^2} = \frac{\sqrt{0+0}}{9+0} = \frac{0}{9} = 0$$

L'Hopital también se puede aplicar, pero es más complejo debido a la raíz cuadrada.

Respuesta b): 0.

c) $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$ Es una indeterminación de tipo $\infty \cdot 0$. La transformamos en $\frac{0}{0}$: Sea $u = 1/x$. Cuando $x \to \infty$, $u \to 0^+$.

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{e^u - 1}{u}$$

Aplicamos L'Hopital (forma $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{e^u}{1} = e^0 = 1$$

Respuesta c): 1.

80. Dada la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$:

a) Halla el dominio de definición.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

c) Determina sus asíntotas.

Solución:

a) **Dominio de definición:** La función $f(x)$ es un producto de un polinomio y una exponencial, ambas definidas en todo $\mathbb{R}$. Dominio: $\mathbb{R}$. **Respuesta a):** El dominio de definición es $\mathbb{R}$.

b) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos:**
Primera derivada: $f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2x \cdot e^{-2x^2}(-4x) = 2e^{-2x^2} - 8x^2e^{-2x^2} = 2e^{-2x^2}(1-4x^2)$

. Igualamos $f'(x) = 0$: $2e^{-2x^2}(1-4x^2) = 0$. Como e^{-2x^2} es siempre positivo,

$1-4x^2=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$. Puntos críticos: $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$. Analizamos el signo de $f'(x)$ (determinado por $1-4x^2$): - Para $x<-\frac{1}{2}$ (e.g., $x=-1$): $1-4(-1)^2=1-4=-3<0$. Decreciente. - Para $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ (e.g., $x=0$): $1-4(0)^2=1>0$.
Creciente. - Para $x>\frac{1}{2}$ (e.g., $x=1$): $1-4(1)^2=1-4=-3<0$. Decreciente. - En $x=-\frac{1}{2}$: Mínimo relativo. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-1e^{-2\left(\frac{1}{4}\right)}=-e^{-1/2}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$. - En $x=\frac{1}{2}$: Máximo relativo. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$. **Respuesta b):** - Intervalos de crecimiento: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. - Intervalos de decrecimiento: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. - Mínimo relativo en $x=-\frac{1}{2}$ con valor $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$. - Máximo relativo en $x=\frac{1}{2}$ con valor $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

c) **Asíntotas:** - Verticales: No hay, ya que el dominio es $\mathbb{R}$. - Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} 2xe^{-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}}$$

Es una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^{2x^2}(4x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{2x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}}$$

Es una indeterminación de tipo $\frac{-\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{2x^2}(4x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2xe^{2x^2}}=0$$

Asíntota horizontal $y=0$. **Respuesta c):** La única asíntota es la horizontal $y=0$.

81. Considera la función $f(x)=e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)$.

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.

b) Estudia, si existen, los puntos de inflexión.

c) Obtén, si existen, las asíntotas horizontales.

Solución:

a) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos:**

Dominio: $\mathbb{R}$. Primera derivada: $f'(x) = -2e^{-2x}\left(x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right) + e^{-2x}(2x-3)$

$f'(x) = e^{-2x}(-2x^2 + 6x - 3 + 2x - 3) = e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 6) = -2e^{-2x}(x^2 - 4x + 3)$. Igualamos

$f'(x) = 0$:

$-2e^{-2x}(x^2 - 4x + 3) = 0$. Como e^{-2x} es siempre positivo, $x^2 - 4x + 3 = 0$. $(x-1)(x-3) = 0$.

Puntos críticos: $x = 1$ y $x = 3$. Analizamos el signo de $f'(x)$ (determinado por $-(x^2 - 4x + 3)$):

- Para $x < 1$ (e.g., $x = 0$): $-(0^2 - 4(0) + 3) = -3 < 0$. Decreciente. - Para $1 < x < 3$ (e.g.,

$x = 2$): $-(2^2 - 4(2) + 3) = -(4 - 8 + 3) = -(-1) = 1 > 0$. Creciente. - Para $x > 3$ (e.g., $x = 4$

): $-(4^2 - 4(4) + 3) = -(16 - 16 + 3) = -3 < 0$. Decreciente. - En $x = 1$: Mínimo relativo.

$f(1) = e^{-2}\left(1 - 3 + \frac{3}{2}\right) = e^{-2}\left(-2 + \frac{3}{2}\right) = e^{-2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e^2}$. - En $x = 3$: Máximo relativo.

$f(3) = e^{-6}\left(3^2 - 3(3) + \frac{3}{2}\right) = e^{-6}\left(9 - 9 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2e^6}$. **Respuesta a):** - Intervalos de crecimiento:

$(1,3)$. - Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,1)$ y $(3,\infty)$. - Mínimo relativo en $x = 1$ con valor

$f(1) = -\frac{1}{2e^2}$. - Máximo relativo en $x = 3$ con valor $f(3) = \frac{3}{2e^6}$.

b) **Puntos de inflexión:** Segunda derivada: $f''(x) = -2e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 6) + e^{-2x}(-4x + 8)$

$f''(x) = e^{-2x}(4x^2 - 16x + 12 - 4x + 8) = e^{-2x}(4x^2 - 20x + 20) = 4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5)$. Igualamos

$f''(x) = 0$: $4e^{-2x}(x^2 - 5x + 5) = 0$. Como e^{-2x} es siempre positivo, $x^2 - 5x + 5 = 0$.

$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puntos de inflexión: $x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.38$ y

$x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.62$. Analizamos el signo de $f''(x)$ (determinado por $x^2 - 5x + 5$): - Para

$x < x_1$: $x^2 - 5x + 5 > 0$. Cóncava. - Para $x_1 < x < x_2$: $x^2 - 5x + 5 < 0$. Convexa. - Para $x > x_2$:

$x^2 - 5x + 5 > 0$. Cóncava. Como $f''(x)$ cambia de signo en x_1 y x_2, ambos son puntos de

inflexión. **Respuesta b):** - Puntos de inflexión en $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

c) **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\to\infty} e^{-2x}\left(x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + \frac{3}{2}}{e^{2x}}$$

Es una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hopital dos veces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 3}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)=\infty\cdot\infty=\infty$$

Asíntota horizontal $y=0$ para $x\to\infty$. **Respuesta c):** La única asíntota horizontal es $y=0$ (para $x\to\infty$).

82. Calcula, si existe, en función del valor de $k\in\mathbb{Z}$, el valor de $\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^3-x^2-x}{\left(x^2-1\right)^{2k}}$.

Solución:

Primero, factorizamos el numerador: $x^4+x^3-x^2-x=x\left(x^3+x^2-x-1\right)=x\left(x^2\left(x+1\right)\right.$ $\left.-\left(x+1\right)\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+1\right)=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$. El denominador es $\left(x^2-1\right)^{2k}=\left(\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right)^{2k}=\left(x-1\right)^{2k}\left(x+1\right)^{2k}$. El límite se convierte en:

$$\lim_{x\to1}\frac{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^{2k}\left(x+1\right)^{2k}}$$

Simplificamos $\left(x-1\right)$ y $\left(x+1\right)$:

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{\left(x-1\right)^{2k-1}\left(x+1\right)^{2k-2}}$$

Ahora, analizamos el valor del límite en función de $k\in\mathbb{Z}$. Sustituimos $x=1$ en las partes que no son cero:

$$\frac{1}{\left(1-1\right)^{2k-1}\left(1+1\right)^{2k-2}}=\frac{1}{0^{2k-1}\cdot2^{2k-2}}$$

El comportamiento depende del exponente $2k-1$.

Caso 1: $2k-1<0$ Esto significa $2k<1\Rightarrow k<1/2$. Como $k\in\mathbb{Z}$, $k\le0$. Si $2k-1<0$, entonces $\left(x-1\right)^{2k-1}$ es equivalente a $\frac{1}{\left(x-1\right)^{-(2k-1)}}$, donde $-\left(2k-1\right)>0$. El término 0^{2k-1} en el denominador se convierte en un factor en el numerador. Sea $m=-\left(2k-1\right)>0$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x\left(x-1\right)^m}{\left(x+1\right)^{2k-2}}=\frac{1\cdot0^m}{2^{2k-2}}=0$$

Para $k\le0$, el límite es 0.

Caso 2: $2k-1=0$ Esto significa $2k=1\Rightarrow k=1/2$. Pero k debe ser un entero. Así que este caso no es posible para $k\in\mathbb{Z}$.

Caso 3: $2k-1>0$ Esto significa $2k>1\Rightarrow k>1/2$. Como $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge1$. Si $2k-1>0$, entonces $\left(x-1\right)^{2k-1}$ tiende a 0 en el denominador.

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{\left(x-1\right)^{2k-1}\left(x+1\right)^{2k-2}}=\frac{1}{0\cdot2^{2k-2}}$$

El denominador tiende a 0. El numerador es 1. Por lo tanto, el límite es ∞ o $-\infty$. Para determinar el signo, necesitamos considerar si $2k-1$ es par o impar. Si $2k-1$ es par (imposible, ya que $2k$ es par, $2k-1$ es impar). Si $2k-1$ es impar (siempre es impar). Si $2k-1$ es impar, entonces $\left(x-1\right)^{2k-1}$ tiene el mismo signo que $\left(x-1\right)$. - $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\left(x-1\right)^{2k-1}\cdot2^{2k-2}}=\frac{1}{0^-\cdot2^{2k-2}}=-\infty$.

- $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^{2k-1}\cdot 2^{2k-2}} = \dfrac{1}{0^+\cdot 2^{2k-2}} = \infty$. Como los límites laterales son diferentes, el límite no existe para $k \geq 1$.

Resumen: - Si $k \leq 0$, el límite es 0. - Si $k \geq 1$, el límite no existe. **Respuesta:** - Si $k \leq 0$, el valor del límite es 0. - Si $k \geq 1$, el límite no existe.

Aplicaciones

83. Diseño de valla publicitaria. Unas expertas en publicidad y aficionadas a las matemáticas van a diseñar una valla publicitaria de longitud 2 metros y altura definida por la curva $y = x + \cos x$, limitada a su vez por dos franjas verticales en $x = 0$ y $x = 2\pi$. Calcula la altura máxima de la valla.

Solución:

La altura de la valla está dada por la función $f(x) = x + \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Queremos encontrar el máximo absoluto de $f(x)$ en este intervalo. Primera derivada: $f'(x) = 1 - \sin x$. Igualamos $f'(x) = 0$: $1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1$. En el intervalo $[0, 2\pi]$, la solución es $x = \dfrac{\pi}{2}$. Evaluamos $f(x)$ en el punto crítico y en los extremos del intervalo: - $f(0) = 0 + \cos(0) = 1$. - $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2} \approx 1.57$. - $f(2\pi) = 2\pi + \cos(2\pi) = 2\pi + 1 \approx 7.28$. El valor máximo es $2\pi + 1$. **Respuesta:** La altura máxima de la valla es $2\pi + 1$ metros.

84. Depreciación. El precio, en euros, de una moto en función de su antigüedad en años, t, viene dado por: $p(t) = 110(t-10)^2 + 4000$, donde $0 \leq t \leq 10$. a) ¿A qué precio se compró? ¿Cuál es su valor al cabo de 8 años? b) ¿A qué ritmo decrece su valor a los 3 años? ¿Y a los 5 años? ¿Y a los 7 años?

Solución:

a) **Precio de compra y valor a los 8 años:** - Precio de compra ($t = 0$): $p(0) = 110(0-10)^2 + 4000 = 110(-10)^2 + 4000 = 110(100) + 4000 = 11000 + 4000 = 15000$ €. - Valor al cabo de 8 años ($t = 8$): $p(8) = 110(8-10)^2 + 4000 = 110(-2)^2 + 4000 = 110(4) + 4000 = 440 + 4000 = 4440$ €. **Respuesta a):** Se compró por 15000 €, y su valor al cabo de 8 años es 4440 €.

b) **Ritmo de decrecimiento:** El ritmo de cambio del valor es la derivada de $p(t)$. $p'(t) = 110 \cdot 2(t-10) = 220(t-10)$. - Ritmo a los 3 años ($t = 3$): $p'(3) = 220(3-10) = 220(-7) = -1540$ €/año. - Ritmo a los 5 años ($t = 5$): $p'(5) = 220(5-10) = 220(-5) = -1100$ €/año. - Ritmo a los 7 años ($t = 7$): $p'(7) = 220(7-10) = 220(-3) = -660$ €/año. **Respuesta b):** - A los 3 años, decrece a un ritmo de 1540 €/año. - A los 5 años, decrece a un ritmo de 1100 €/año. - A los 7 años, decrece a un ritmo de 660 €/año.

85. Evolución del peso. El peso en kilogramos de un toro se puede modelar por la función $f(t) = 1200 - 1140e^{-0,4t}$, siendo t el tiempo en años. a) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el toro pese 800 kg? b) ¿Es cierto que el peso del toro aumenta muy rápido al comienzo de su vida, para luego crecer más lentamente? Compruébalo calculando el ritmo de crecimiento al cabo de uno, dos y tres años.

Solución:

a) **Tiempo para que el toro pese 800 kg:** Igualamos $f(t) = 800$: $1200 - 1140e^{-0.4t} = 800$
$400 = 1140e^{-0.4t}$ $e^{-0.4t} = \frac{400}{1140} = \frac{40}{114} = \frac{20}{57}$. Aplicamos logaritmo natural: $-0.4t = \ln\left(\frac{20}{57}\right)$
$t = \frac{\ln\left(\frac{20}{57}\right)}{-0.4} = \frac{\ln(20) - \ln(57)}{-0.4} \approx \frac{2.9957 - 4.0431}{-0.4} = \frac{-1.0474}{-0.4} \approx 2.6185$ años. **Respuesta a):** Tienen que transcurrir aproximadamente 2.62 años.

b) **Ritmo de crecimiento:** El ritmo de crecimiento es la derivada de $f(t)$.
$f'(t) = -1140e^{-0.4t}(-0.4) = 456e^{-0.4t}$. - Ritmo al cabo de 1 año ($t = 1$):
$f'(1) = 456e^{-0.4(1)} = 456e^{-0.4} \approx 456(0.6703) \approx 305.67$ kg/año. - Ritmo al cabo de 2 años ($t = 2$):
$f'(2) = 456e^{-0.4(2)} = 456e^{-0.8} \approx 456(0.4493) \approx 204.90$ kg/año. - Ritmo al cabo de 3 años ($t = 3$): $f'(3) = 456e^{-0.4(3)} = 456e^{-1.2} \approx 456(0.3012) \approx 137.31$ kg/año. Como el ritmo de crecimiento disminuye con el tiempo ($305.67 > 204.90 > 137.31$), es cierto que el peso aumenta muy rápido al comienzo y luego más lentamente. **Respuesta b):** Sí, es cierto. El ritmo de crecimiento disminuye con el tiempo, como se muestra en los cálculos: $f'(1) \approx 305.67$ kg/año, $f'(2) \approx 204.90$ kg/año, $f'(3) \approx 137.31$ kg/año.

86. Propagación de un rumor. La propagación de un rumor entre los compañeros de un curso de bachillerato sigue la función $f(x) = e^{0,462t}$, donde t viene dado en días. ¿Cuál es la rapidez a la que se propaga el rumor al tercer día? ¿Y al décimo?

Solución:

La función es $f(t) = e^{0.462t}$. La rapidez de propagación es la derivada de $f(t)$. $f'(t) = 0.462e^{0.462t}$. - Rapidez al tercer día ($t = 3$): $f'(3) = 0.462e^{0.462(3)} = 0.462e^{1.386} \approx 0.462(4.00) \approx 1.848$ personas/día. - Rapidez al décimo día ($t = 10$): $f'(10) = 0.462e^{0.462(10)} = 0.462e^{4.62} \approx 0.462(101.24) \approx 46.77$ personas/día. **Respuesta:** La rapidez de propagación al tercer día es aproximadamente 1.848 personas/día, y al décimo día es aproximadamente 46.77 personas/día.

87. Receta de cocina. Xinjie y Noelia son dos compañeros universitarios aficionados a la cocina y van a preparar su plato favorito, pavo al horno con salsa bárbara y hojas de ciprés. La temperatura, en grados centígrados, que mantiene el pavo t minutos después de sacarlo del horno se puede modelar mediante la función: $T(t) = 62e^{-0,13t} + 23$. a) ¿A qué temperatura salió el pavo del horno? b) ¿A qué ritmo disminuye la temperatura del pavo después de un minuto de estar en la mesa? ¿Y tras tres minutos?

Solución:

a) **Temperatura al salir del horno:** La temperatura al salir del horno es cuando $t=0$. $T(0)=62e^{-0.13(0)}+23=62e^{0}+23=62(1)+23=85$ °C. **Respuesta a):** El pavo salió del horno a 85 °C.

b) **Ritmo de disminución de la temperatura:** El ritmo de cambio de la temperatura es la derivada de $T(t)$. $T'(t)=62e^{-0.13t}(-0.13)=-8.06e^{-0.13t}$. - Ritmo después de un minuto ($t=1$): $T'(1)=-8.06e^{-0.13(1)}=-8.06e^{-0.13}\approx -8.06(0.8781)\approx -7.08$ °C/min. - Ritmo después de tres minutos ($t=3$): $T'(3)=-8.06e^{-0.13(3)}=-8.06e^{-0.39}\approx -8.06(0.6770)\approx -5.46$ °C/min. **Respuesta b):** - Después de un minuto, la temperatura disminuye a un ritmo de aproximadamente 7.08 °C/min. - Después de tres minutos, la temperatura disminuye a un ritmo de aproximadamente 5.46 °C/min.

88. Movimiento de una partícula. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. y su posición en función del tiempo viene dada por $f(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$, para $t\geq 0$, donde $f(t)$ viene dado en metros, y t, en segundos. a) Calla la velocidad en el instante t. ¿Cuándo aumenta? ¿Cuándo disminuye? ¿En qué instante la velocidad es máxima o mínima? b) Halla la aceleración en el instante t. ¿Cuándo es 0? c) Dibuja las funciones de posición, velocidad y aceleración en el intervalo $[0,4]$.

Solución:

a) **Velocidad en el instante t:** La velocidad es la primera derivada de la posición:

$v(t)=f'(t)$. $v(t)=\dfrac{1(t^2+1)-t(2t)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$. Dominio: $t\geq 0$.

Para saber cuándo la velocidad aumenta o disminuye,
analizamos la derivada de la velocidad (aceleración).

$$a(t)=v'(t)=\frac{-2t(t^2+1)^2-(1-t^2)\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^4}=\frac{-2t(t^2+1)-4t(1-t^2)}{(t^2+1)^3}$$

$a(t)=\dfrac{-2t^3-2t-4t+4t^3}{(t^2+1)^3}=\dfrac{2t^3-6t}{(t^2+1)^3}=\dfrac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$. Igualamos $a(t)=0$: $2t(t^2-3)=0$. Como $t\geq 0$, $t=0$ o $t^2=3\Rightarrow t=\sqrt{3}$. Analizamos el signo de $a(t)$ en los intervalos $(0,\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3},\infty)$. - Para $0<t<\sqrt{3}$ (e.g., $t=1$): $a(1)=\dfrac{2(1)(1-3)}{(1+1)^3}=\dfrac{-4}{8}=-0.5<0$. La velocidad disminuye. - Para $t>\sqrt{3}$ (e.g., $t=2$):

$a(2)=\dfrac{2(2)(4-3)}{(4+1)^3}=\dfrac{4}{125}>0$. La velocidad aumenta. **Velocidad máxima**

o mínima: La velocidad es $v(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$. En $t=0$, $v(0)=1$. En $t=\sqrt{3}$,

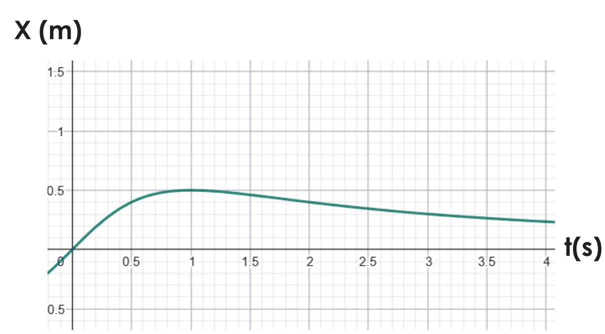
$$v(\sqrt{3})=\frac{1-(\sqrt{3})^2}{\left((\sqrt{3})^2+1\right)^2}=\frac{1-3}{(3+1)^2}=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}.$$

Como la velocidad disminuye hasta $t=\sqrt{3}$ y luego aumenta, en $t=\sqrt{3}$ la velocidad es mínima. **Respuesta a):** - Velocidad: $v(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$. - La velocidad disminuye en $(0,\sqrt{3})$ y aumenta en $(\sqrt{3},\infty)$. - La velocidad es mínima en $t=\sqrt{3}$ con valor $v(\sqrt{3})=-\dfrac{1}{8}$ m/s.

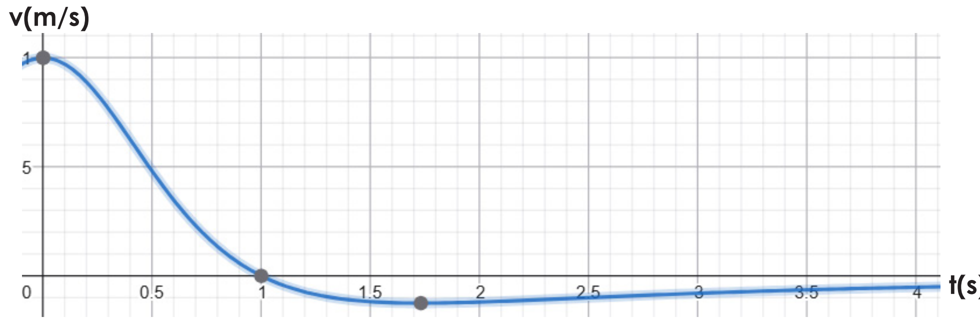
b) **Aceleración en el instante *t*. ¿Cuándo es 0**? La aceleración es $a(t)=\dfrac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$. La aceleración es 0 cuando $t=0$ o $t=\sqrt{3}$. **Respuesta b):** La aceleración es $a(t)=\dfrac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$. Es 0 en $t=0$ y $t=\sqrt{3}$ segundos.

c) **Gráficas de posición, velocidad y aceleración en $[0,4]$:** (Descripción de las gráficas)

Posición $f(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$**:** - $f(0)=0$. - $f'(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$. Cero en $t=1$. - Máximo en $t=1$. $f(1)=\dfrac{1}{2}$. - $f(4)=\dfrac{4}{17}$. - Comportamiento: Sube de $(0,0)$ a un máximo en $(1,1/2)$, luego baja a $(4,4/17)$.

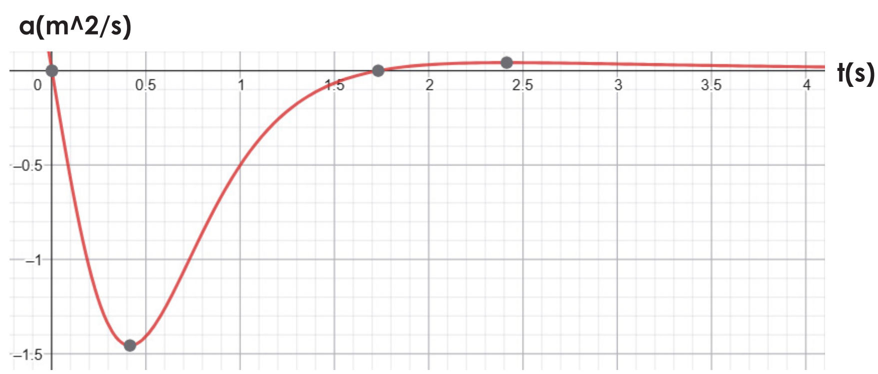


Velocidad $v(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$**:** - $v(0)=1$. - $v(1)=0$. - Mínimo en $t=\sqrt{3}$. $v(\sqrt{3})=-1/8$. - $v(4)=\dfrac{1-16}{(16+1)^2}=\dfrac{-15}{289}\approx-0.05$. - Comportamiento: Baja de $(0,1)$ a un mínimo en $(\sqrt{3},-1/8)$, luego sube a $(4,-15/289)$.



Aceleración $a(t)=\dfrac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3}$: - $a(0)=0$. - $a(\sqrt{3})=0$. . - $a(1)=-0.5$. -

$a(4)=\dfrac{2(4)(16-3)}{(16+1)^3}=\dfrac{8(13)}{17^3}=\dfrac{104}{4913}\approx 0.02$. - Comportamiento: Empieza en $(0,0)$, baja a un mínimo (entre 0 y $\sqrt{3}$), sube pasando por $(\sqrt{3},0)$, luego sube a $(4,104/4913)$. .



89. Asía de venta de automóviles. Una asesora de ventas de un concesionario de automóviles vende 50 coches al mes a un precio de 20 000 euros cada uno. Por cada coche que venda de más, puede bajar el precio en 300 euros. ¿Cuántos coches debe vender al mes para obtener el máximo ingreso por ventas?

Solución:

Sea x el número de coches vendidos por encima de 50. El número total de coches vendidos es $50+x$. El precio por coche es $20000-300x$. La función de ingresos $I(x)$ es:

$I(x)=(50+x)(20000-300x)$. Dominio: $x\geq 0$. Además, el precio no puede ser negativo,

$20000-300x\geq 0\Rightarrow 300x\leq 20000\Rightarrow x\leq\dfrac{200}{3}\approx 66.67$.

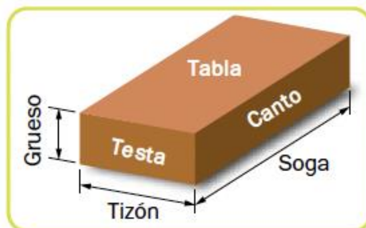
Así, $0\leq x\leq 66$. $I(x)=1000000-15000x+20000x-300x^2=-300x^2+5000x+1000000$.

Calculamos la primera derivada: $I'(x)=-600x+5000$. Igualamos $I'(x)=0$:

$-600x+5000=0\Rightarrow 600x=5000\Rightarrow x=\dfrac{5000}{600}=\dfrac{50}{6}=\dfrac{25}{3}\approx 8.33$. Este punto crítico está en el dominio. Calculamos la segunda derivada: $I''(x)=-600$. Como $I''\left(\dfrac{25}{3}\right)=-600<0$, es un máximo. Como x debe ser un número entero, evaluamos $x = 8$ y $x = 9$. $I(8) = -300(8)^2$ $+ 5000(8) + 1000000 = -300(64) + 40000 + 1000000 = -19200 + 40000 + 1000000 = 1020800$.

$I(9) = -300(9)^2 + 5000(9) + 1000000 = -300(81) + 45000 + 1000000 = -24300 + 45000 + 1000000$ $= 1020700$. El máximo se obtiene para $x = 8$. Número total de coches: $50 + 8 = 58$. **Respuesta:** Debe vender 58 coches al mes para obtener el máximo ingreso por ventas.

90. Dimensiones de un ladrillo. Se sabe que la soga de un ladrillo macizo mide el doble que su tizón y que su volumen es de 1440 cm³. ¿Cuáles son las dimensiones que minimizan la superficie total del ladrillo si la soga, x, debe medir entre 24 y 29 cm?



Solución:

Sean las dimensiones del ladrillo: - Soga: x - Tizón: y - Grueso: z Condición:

Soga es el doble que tizón $\Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$. Volumen: $V = xyz = 1440$ cm ^{3}

. Sustituimos $y = \frac{x}{2}$: $x\left(\frac{x}{2}\right)z = 1440 \Rightarrow \frac{x^2}{2}z = 1440 \Rightarrow z = \frac{2880}{x^2}$. Superficie total:

$S = 2(xy + xz + yz)$. Sustituimos $y = \frac{x}{2}$ y $z = \frac{2880}{x^2}$: $S(x) = 2\left(x\left(\frac{x}{2}\right) + x\left(\frac{2880}{x^2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2880}{x^2}\right)\right)$

$S(x) = 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2880}{x} + \frac{1440}{x}\right) = 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{4320}{x}\right) = x^2 + \frac{8640}{x}$. Dominio: $x \in [24, 29]$.

Calculamos la primera derivada: $S'(x) = 2x - \frac{8640}{x^2}$. Igualamos $S'(x) = 0$:

$2x - \frac{8640}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{8640}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 8640 \Rightarrow x^3 = 4320$. $x = \sqrt[3]{4320} \approx 16.28$ cm. Este punto crítico no está en el intervalo $[24, 29]$. Por lo tanto, el mínimo (y máximo) se encontrarán en los extremos del intervalo. Evaluamos $S(x)$ en $x = 24$ y $x = 29$: - $S(24) = 24^2 + \frac{8640}{24} = 576 + 360 = 936$ cm ^{2}. - $S(29) = 29^2 + \frac{8640}{29} = 841 + 297.93 \approx 1138.93$ cm ^{2}. La superficie mínima es 936 cm ^{2} en $x = 24$. Las dimensiones para $x = 24$: Soga $x = 24$ cm. Tizón $y = \frac{x}{2} = \frac{24}{2} = 12$ cm. Grueso $z = \frac{2880}{x^2} = \frac{2880}{24^2} = \frac{2880}{576} = 5$ cm. **Respuesta:** Las dimensiones que minimizan la superficie total son soga 24 cm, tizón 12 cm y grueso 5 cm.

91. Venta online. Un fabricante vende online 1000 ordenadores portátiles a la semana, a razón de 450 euros cada uno. Por cada 10 euros de descuento que ofrece, el número de portátiles vendidos se incrementa en 100 por semana.

a) Calcula la función de la demanda.

b) ¿Cuántos portátiles y a qué precio debe vender para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

Solución:

a) **Función de la demanda:** Sea p el precio y q la cantidad demandada. Punto inicial: $(q_0, p_0) = (1000, 450)$. Cambio: Por cada 10 euros de descuento (precio baja en 10), la cantidad aumenta en 100. Si p baja en 10, q sube en 100. La pendiente de la función de demanda (precio en función de cantidad) es $\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{-10}{100} = -\frac{1}{10}$.

La ecuación de la recta de demanda es $p - p_0 = m(q - q_0)$: $p - 450 = -\frac{1}{10}(q - 1000)$ $p = -\frac{1}{10}q + 100 + 450$ $p(q) = -\frac{1}{10}q + 550$. **Respuesta a):** La función de la demanda es $p(q) = -\frac{1}{10}q + 550$.

b) **Maximizar los ingresos:** La función de ingresos es $I(q) = q \cdot p(q) = q\left(-\frac{1}{10}q + 550\right) = -\frac{1}{10}q^2 + 550q$. Dominio: $q \geq 0$. Además, el precio no puede ser negativo, $-\frac{1}{10}q + 550 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{10}q \leq 550 \Rightarrow q \leq 5500$. Así, $0 \leq q \leq 5500$.

Calculamos la primera derivada: $I'(q) = -\frac{2}{10}q + 550 = -\frac{1}{5}q + 550$. Igualamos $I'(q) = 0$: $-\frac{1}{5}q + 550 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}q = 550 \Rightarrow q = 550 \times 5 = 2750$. Este punto crítico está en el dominio.

Calculamos la segunda derivada: $I''(q) = -\frac{1}{5}$. Como $I''(2750) = -\frac{1}{5} < 0$, es un máximo. La cantidad de portátiles para maximizar los ingresos es 2750. El precio correspondiente es $p(2750) = -\frac{1}{10}(2750) + 550 = -275 + 550 = 275$ euros. Los ingresos máximos son $I(2750) = 2750 \times 275 = 756250$ euros. **Respuesta b):** Debe vender 2750 portátiles a un precio de 275 euros cada uno. Los ingresos máximos son 756250 euros.

92. Cálculo de dimensiones. Un alambre enrollado de 100 m de longitud se divide en dos partes. Con una de ellas se construye una circunferencia, y con la otra, un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?

Solución:

Sea x la longitud de alambre utilizada para la circunferencia, y $100-x$ para el cuadrado. Dominio: $0 \le x \le 100$.

Circunferencia: Perímetro $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$. Área $A_c = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$.

Cuadrado: Perímetro $4L = 100-x \Rightarrow L = \frac{100-x}{4}$. Área $A_s = L^2 = \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{(100-x)^2}{16}$.

Suma de áreas: $A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(100-x)^2}{16}$. Calculamos la primera derivada:

$A'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2(100-x)(-1)}{16} = \frac{x}{2\pi} - \frac{100-x}{8}$. Igualamos $A'(x)=0$: $\frac{x}{2\pi} - \frac{100-x}{8} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\pi} = \frac{100-x}{8}$

$8x = 2\pi(100-x) \Rightarrow 8x = 200\pi - 2\pi x\ 8x + 2\pi x = 200\pi \Rightarrow x(8+2\pi) = 200\pi\ x = \frac{200\pi}{8+2\pi} = \frac{100\pi}{4+\pi}$. Este valor está en el dominio $[0,100]$ (ya que $\pi \approx 3.14$, $x \approx \frac{100\cdot 3.14}{4+3.14} = \frac{314}{7.14} \approx 43.98$). Calculamos la segunda derivada: $A''(x) = \frac{1}{2\pi} - \frac{-1}{8} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}$. Como $A''(x)$ es siempre positiva, el punto crítico corresponde a un mínimo. La longitud para la circunferencia es $x = \frac{100\pi}{4+\pi}$ m. La longitud para el cuadrado es $100 - x = 100 - \frac{100\pi}{4+\pi} = \frac{400+100\pi-100\pi}{4+\pi} = \frac{400}{4+\pi}$ m. **Respuesta:** El alambre debe cortarse en dos partes de longitud $\frac{100\pi}{4+\pi}$ m para la circunferencia y $\frac{400}{4+\pi}$ m para el cuadrado.

93. Costes y beneficios. Determina el número de unidades x que se deben fabricar para maximizar el beneficio obtenido con la venta de un producto, sabiendo que los costes vienen dados por $C(x) = 0{,}0004x^3 - 0{,}02x^2 + 2x - 65$, y los ingresos por $I(x) = -0{,}02x^2 + 2{,}3x$, con x medido en miles de euros en ambos casos.

Solución:

La función de beneficio $B(x)$ es $I(x) - C(x)$. $B(x) = (-0.02x^2 + 2.3x) - (0.0004x^3 - 0.02x^2 + 2x - 65)$

$B(x) = -0.0004x^3 - 0.02x^2 + 0.02x^2 + 2.3x - 2x + 65\ B(x) = -0.0004x^3 + 0.3x + 65$. Dominio: $x \ge 0$. Calculamos la primera derivada: $B'(x) = -0.0012x^2 + 0.3$. Igualamos $B'(x) = 0$:

$-0.0012x^2 + 0.3 = 0 \Rightarrow 0.0012x^2 = 0.3 \Rightarrow x^2 = \frac{0.3}{0.0012} = \frac{3000}{12} = 250$. $x = \sqrt{250} = \sqrt{25\cdot 10} = 5\sqrt{10} \approx 15.81$.

Calculamos la segunda derivada: $B''(x) = -0.0024x$. Evaluamos $B''(5\sqrt{10})$:

$B''(5\sqrt{10}) = -0.0024(5\sqrt{10}) = -0.012\sqrt{10} < 0$. Es un máximo. El número de unidades x debe ser $5\sqrt{10}$ (en miles de unidades). **Respuesta:** Se deben fabricar $5\sqrt{10}$ unidades (aproximadamente 15.81 unidades) para maximizar el beneficio.

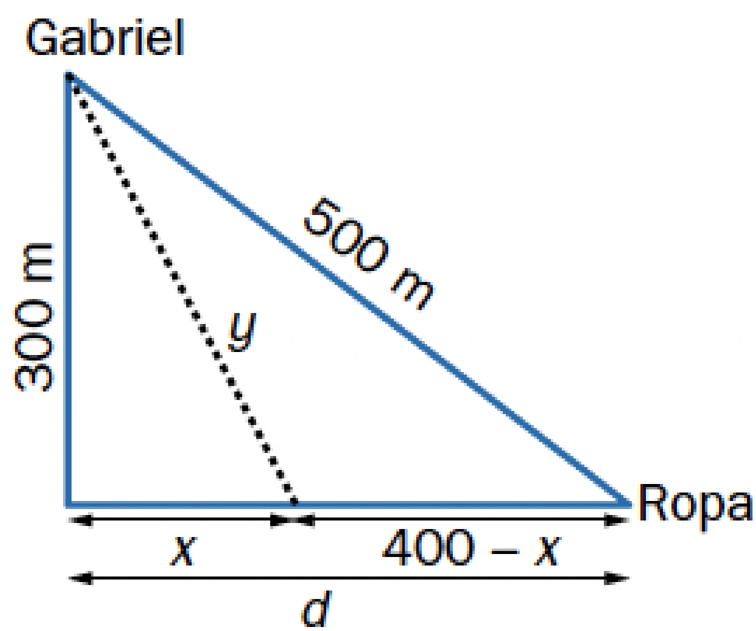
94. Efectividad de la publicidad en Internet. La efectividad de un anuncio publicitario en Internet depende del número de veces que una persona lo vea. Una empresa publicitaria ha encontrado un modelo que le permite analizar la efectividad, y viene dado por $E(x) = 0{,}9x - 0{,}15x^2$, donde x es el número de veces que alguien ve el anuncio. ¿Cuántas veces debe ver el anuncio una persona para que tenga máxima efectividad?

Solución:

La función de efectividad es $E(x) = 0.9x - 0.15x^2$. Dominio: $x \geq 0$. Calculamos la primera derivada: $E'(x) = 0.9 - 0.3x$. Igualamos $E'(x) = 0$: $0.9 - 0.3x = 0 \Rightarrow 0.3x = 0.9 \Rightarrow x = \frac{0.9}{0.3} = 3$.

Calculamos la segunda derivada: $E''(x) = -0.3$. Como $E''(3) = -0.3 < 0$, es un máximo.
Respuesta: Una persona debe ver el anuncio 3 veces para que tenga máxima efectividad.

95. Selección de rutas. Gabriel está bañándose en el mar y, de repente, estalla una tormenta. Para recoger su ropa, que está en la orilla de la playa, duda entre ir nadando directamente hacia ella o salir del agua en otro punto y llegar corriendo allí por la orilla. Su velocidad por tierra es de 6 m/s, y nadando, de 2 m/s. Si se encuentra situado, en línea recta, a 500 m de la ropa y a 300 m de la orilla, ¿cuál es el mejor camino que puede seguir?



Solución:

Sea x la distancia que Gabriel corre por la orilla. La distancia desde el punto donde está Gabriel en el mar hasta la orilla es 300 m. La distancia desde el punto en la orilla más cercano a Gabriel hasta la ropa es 400 m (500 m es la distancia en línea recta a la ropa, formando un triángulo rectángulo con la orilla). La distancia que nada es la hipotenusa de un triángulo rectángulo

con catetos 300 m y $(400 - x)$ m. Distancia nadando: $d_n = \sqrt{300^2 + (400 - x)^2}$. Distancia corriendo: $d_c = x$. Velocidad nadando: $v_n = 2$ m/s. Velocidad corriendo: $v_c = 6$ m/s.

Tiempo total: $T(x) = \frac{d_n}{v_n} + \frac{d_c}{v_c} = \frac{\sqrt{300^2 + (400-x)^2}}{2} + \frac{x}{6}$. Dominio: $0 \le x \le 400$. Calculamos la primera derivada de $T(x)$: $T'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{300^2 + (400-x)^2}} \cdot 2(400-x)(-1) + \frac{1}{6}$

$T'(x) = \frac{-(400-x)}{2\sqrt{300^2 + (400-x)^2}} + \frac{1}{6}$. Igualamos $T'(x) = 0$: $\frac{400-x}{2\sqrt{300^2 + (400-x)^2}} = \frac{1}{6}$

$6(400-x) = 2\sqrt{300^2 + (400-x)^2}$ $3(400-x) = \sqrt{300^2 + (400-x)^2}$. Elevamos al cuadrado ambos lados: $9(400-x)^2 = 300^2 + (400-x)^2$ $8(400-x)^2 = 300^2$ $(400-x)^2 = \frac{300^2}{8} = \frac{90000}{8} = 11250$.

$400 - x = \pm\sqrt{11250} = \pm\sqrt{225 \cdot 50} = \pm 15\sqrt{50} = \pm 15 \cdot 5\sqrt{2} = \pm 75\sqrt{2}$. $x = 400 \mp 75\sqrt{2}$.

$x_1 = 400 - 75\sqrt{2} \approx 400 - 75(1.414) = 400 - 106.05 = 293.95$ m. (Este está en el dominio).

$x_2 = 400 + 75\sqrt{2} \approx 400 + 106.05 = 506.05$ m. (Este está fuera del dominio $[0, 400]$).

El punto crítico es $x \approx 293.95$ m. Evaluamos $T(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo: - $T(0)$ (nada directamente a la ropa): $d_n = 500$, $d_c = 0$. $T(0) = \frac{500}{2} + \frac{0}{6} = 250$ s.

- $T(400)$ (nada hasta el punto más cercano en la orilla, luego corre 400 m):

$d_n = 300$, $d_c = 400$. $T(400) = \frac{300}{2} + \frac{400}{6} = 150 + 66.67 = 216.67$ s. - $T(293.95)$:

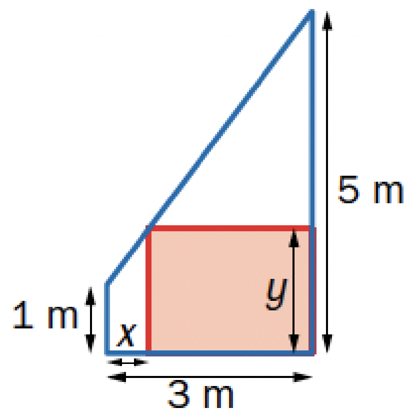
$400 - x = 75\sqrt{2}$. $d_n = \sqrt{300^2 + \left(75\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{90000 + 11250} = \sqrt{101250} \approx 318.2$ m.

$T(293.95) = \frac{318.2}{2} + \frac{293.95}{6} = 159.1 + 48.99 = 208.09$ s. El tiempo mínimo es aproximadamente 208.09 s. **Respuesta:** El mejor camino es nadar hasta un punto en la orilla a aproximadamente 293.95 m de la ropa (medido a lo largo de la orilla), y luego correr el resto.

96. Estudio de arquitectura Se desea construir un armario rectangular en el hueco de una escalera de un chalet.

a) Expresa el área del rectángulo en función de la longitud x.

b) Halla las dimensiones del rectángulo que tenga una superficie máxima.



Solución: El hueco de la escalera tiene forma de L, con dimensiones exteriores de 3 m de ancho y 5 m de alto. El vértice interior de la L está a 1 m del lado izquierdo y a 1 m del lado inferior. Si colocamos el origen de coordenadas en la esquina inferior izquierda del hueco, los vértices del hueco son $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$, $(1,5)$, $(0,5)$.

Para que un armario rectangular de dimensiones x (ancho) e y (alto) tenga la mayor área posible y encaje en el hueco, su esquina superior derecha (x,y) debe estar en la línea que conecta los puntos $(1,5)$ y $(3,1)$. Esta línea representa la "diagonal interior" del hueco en forma de L.

a) La ecuación de la recta que pasa por $(1,5)$ y $(3,1)$ es:

$$y-1=\frac{5-1}{1-3}(x-3)$$

$$y-1=\frac{4}{-2}(x-3)$$

$$y-1=-2(x-3)$$

$$y=-2x+6+1$$

$$y=-2x+7$$

El área del rectángulo en función de la longitud x es $A(x)=x\cdot y$. Sustituyendo y:

$$A(x)=x(-2x+7)=-2x^2+7x$$

El dominio para x es el intervalo $[1,3]$, ya que la esquina superior derecha del rectángulo debe estar en la línea entre $x=1$ y $x=3$.

b) Para hallar las dimensiones que maximizan la superficie, derivamos $A(x)$ e igualamos a cero:

$$A'(x)=-4x+7$$

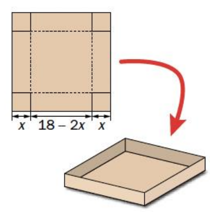
$$-4x+7=0\Rightarrow 4x=7\Rightarrow x=\frac{7}{4}\text{m}$$

Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$A''(x) = -4$$

Como $A''(x) < 0$, el punto crítico corresponde a un máximo. Las dimensiones del rectángulo son: Ancho: $x = \frac{7}{4} = 1{,}75$ m Alto: $y = -2\left(\frac{7}{4}\right) + 7 = -\frac{7}{2} + 7 = \frac{7}{2} = 3{,}5$ m El área máxima sería $A\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{8} = 6{,}125\text{m}^2$. Comparamos con los extremos del intervalo: $A(1) = -2(1)^2 + 7(1) = 5\text{m}^2$ $A(3) = -2(3)^2 + 7(3) = -18 + 21 = 3\text{m}^2$ El máximo absoluto se encuentra en $x = \frac{7}{4}$.

97. Cálculo de dimensiones Queremos fabricar un vaciabolsillos con una pieza cuadrada de polipiel de 18 cm de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y luego doblándolos. Calcula el lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen del vaciabolsillos sea máximo.



Solución:

Sea $L = 18$ cm el lado de la pieza cuadrada de polipiel. Sea x el lado de los cuadrados que se cortan de las esquinas. Al cortar los cuadrados y doblar los lados, la base del vaciabolsillos será un cuadrado de lado $L - 2x = 18 - 2x$. La altura del vaciabolsillos será x. El volumen $V(x)$ del vaciabolsillos es:

$$V(x) = (18 - 2x)^2 \cdot x$$

El dominio de x es $x > 0$ y $18 - 2x > 0 \Rightarrow 2x < 18 \Rightarrow x < 9$. Por lo tanto, $x \in (0,9)$. Desarrollamos la expresión del volumen:

$$V(x) = (324 - 72x + 4x^2)x = 4x^3 - 72x^2 + 324x$$

Para encontrar el máximo volumen, calculamos la primera derivada de $V(x)$ y la igualamos a cero:

$$V'(x) = 12x^2 - 144x + 324$$

$$12x^2 - 144x + 324 = 0$$

Dividimos por 12:

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(27)}}{2(1)} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x_1 = \frac{12+6}{2} = 9$ $x_2 = \frac{12-6}{2} = 3$ La solución $x_1 = 9$ está en el límite del dominio, donde el volumen sería 0. La solución $x_2 = 3$ está dentro del dominio $(0,9)$.

Para confirmar que $x = 3$ es un máximo, usamos la segunda derivada:

$$V''(x) = 24x - 144$$

$$V''(3) = 24(3) - 144 = 72 - 144 = -72$$

Como $V''(3) < 0$, $x = 3$ corresponde a un máximo. El lado del cuadrado que se debe cortar es 3 cm.

98. Construcción de una parcela Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombran consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que los vértices A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D. ¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Solución: Sea el rectángulo ABDE con vértices A, B, D, E. Sean w la longitud de los lados AB y DE, y h la longitud de los lados AE y BD. Los vértices del pentágono son A, B, C, D, E. Los lados son AB, BC, CD, DE, EA. El punto C forma un triángulo equilátero con B y D. La longitud del lado BD es h. Por lo tanto, $BC = CD = h$. El perímetro del pentágono es $P = AB + BC + CD + DE + EA = w + h + h + w + h = 2w + 3h$. Dado que el agricultor dispone de 120 metros de valla, $P = 120$:

$$2w + 3h = 120$$

Despejamos w:

$$w = 60 - \frac{3}{2}h$$

El área del pentágono es la suma del área del rectángulo ABDE y el área del triángulo equilátero BCD. Área del rectángulo: $A_{rect} = w \cdot h$. Área del triángulo equilátero con lado h: $A_{tri} = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2$. El área total A es:

$$A(h) = wh + \frac{\sqrt{3}}{4}h^2$$

Sustituimos w:

$$A(h) = \left(60 - \frac{3}{2}h\right)h + \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 = 60h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}h^2$$

$$A(h) = 60h + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)h^2 = 60h + \frac{\sqrt{3}-6}{4}h^2$$

El dominio para h es $h > 0$. Además, $w > 0 \Rightarrow 60 - \frac{3}{2}h > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}h < 60 \Rightarrow h < 40$. Así, $h \in (0,40)$. Para maximizar el área, calculamos la primera derivada de $A(h)$ y la igualamos a cero:

$$A'(h) = 60 + 2\left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)h = 60 + \frac{\sqrt{3}-6}{2}h$$

$$60 + \frac{\sqrt{3}-6}{2}h = 0$$

$$\frac{6-\sqrt{3}}{2}h = 60$$

$$h = \frac{120}{6-\sqrt{3}}$$

Racionalizamos el denominador:

$$h = \frac{120\left(6+\sqrt{3}\right)}{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(6+\sqrt{3}\right)} = \frac{120\left(6+\sqrt{3}\right)}{36-3} = \frac{120\left(6+\sqrt{3}\right)}{33} = \frac{40\left(6+\sqrt{3}\right)}{11}\text{m}$$

Para verificar que es un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$A''(h) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}$$

Dado que $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, $\sqrt{3}-6$ es negativo, por lo que $A''(h) < 0$. Esto confirma que h es un máximo. Calculamos w:

$$w = 60 - \frac{3}{2}h = 60 - \frac{3}{2}\cdot\frac{40\left(6+\sqrt{3}\right)}{11} = 60 - \frac{60\left(6+\sqrt{3}\right)}{11}$$

$$w = \frac{660-\left(360+60\sqrt{3}\right)}{11} = \frac{300-60\sqrt{3}}{11}\text{m}$$

La distancia del vértice A al vértice B es w, y la distancia del vértice A al vértice E es h. Por lo tanto, el agricultor debe ubicar los vértices B y E a las siguientes distancias del vértice A:

Distancia AB (w): $\frac{300-60\sqrt{3}}{11}$ m $\approx 17{,}83$ m Distancia AE (h): $\frac{40\left(6+\sqrt{3}\right)}{11}$ m $\approx 28{,}12$ m

99. Contaminación bacteriana La cantidad de toneladas de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0{,}15x + 1$, siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

a) ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por bacterias? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

b) ¿En qué momento hay la menor cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

c) ¿Hay algún momento en el cual el agua no está infectada? Justifica la respuesta.

Solución:

a) **Cantidad inicial de agua infectada:** El valor inicial se obtiene evaluando $f(x)$ en $x=0$:

$$f(0)=e^{-0}+0,15(0)+1=1+0+1=2$$

Inicialmente, había 2 toneladas de agua infectada.

Valor en un horizonte infinito: Calculamos el límite de $f(x)$ cuando $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}+0,15x+1\right)$$

Sabemos que $\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$ y $\lim_{x\to\infty} 0,15x=\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0+\infty+1=\infty$$

Interpretación: La cantidad de agua infectada tiende a aumentar indefinidamente a largo plazo.

b) Para encontrar el momento de menor cantidad de agua infectada, calculamos la primera derivada de $f(x)$ y la igualamos a cero:

$$f'(x)=-e^{-x}+0,15$$

$$-e^{-x}+0,15=0$$

$$e^{-x}=0,15$$

Aplicamos el logaritmo natural a ambos lados:

$$-x=\ln(0,15)$$

$$x=-\ln(0,15)=\ln\left(\frac{1}{0,15}\right)=\ln\left(\frac{100}{15}\right)=\ln\left(\frac{20}{3}\right)$$

$$x\approx 1,897 \text{ días}$$

Para verificar que es un mínimo, calculamos la segunda derivada:

$$f''(x)=e^{-x}$$

$$f''\left(\ln\left(\frac{20}{3}\right)\right)=e^{-\ln(20/3)}=e^{\ln(3/20)}=\frac{3}{20}=0,15$$

Como $f''\left(\ln\left(\frac{20}{3}\right)\right)>0$, este punto corresponde a un mínimo. La menor cantidad de agua infectada ocurre aproximadamente a los 1,897 días. La cantidad de toneladas en ese momento es:

$$f\left(\ln\left(\frac{20}{3}\right)\right)=e^{-\ln(20/3)}+0,15\ln\left(\frac{20}{3}\right)+1$$

$$f\left(\ln\left(\frac{20}{3}\right)\right)=\frac{3}{20}+0,15\ln\left(\frac{20}{3}\right)+1=0,15+0,15\ln\left(\frac{20}{3}\right)+1$$

$$f\left(\ln\left(\frac{20}{3}\right)\right)=1,15+0,15\ln\left(\frac{20}{3}\right)\approx 1,15+0,15(1,897)\approx 1,43455 \text{ toneladas}$$

c) Para que el agua no esté infectada, $f(x)$ debería ser 0.

$$e^{-x}+0{,}15x+1=0$$

Sabemos que $e^{-x}>0$ para cualquier x. Para $x\geq 0$, $0{,}15x\geq 0$. Por lo tanto, $e^{-x}+0{,}15x+1$ siempre será mayor que 1 para $x\geq 0$.

$$f(x)=e^{-x}+0{,}15x+1>1\cdot \text{para todo } x\geq 0$$

Esto significa que $f(x)$ nunca será 0. Por lo tanto, el agua nunca estará completamente desinfectada.

100. Velocidad de un trayecto Una campesina contrata a una empresa de conductores para que lleven los tractores hasta los pueblos donde deben trabajar. Supongamos que los conductores realizan todo el trayecto a una velocidad constante.

a) Sabemos que el pueblo al que se debe llevar un tractor se encuentra a 300 km de distancia, que el precio del gasóleo es de 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € por hora. Además, el consumo de gasóleo (en litros por hora), en funcion de la velocidad x (en kilómetros por hora), es dado por la funcion Comprueba que la función $G(x)=5+\dfrac{x^2}{98}$ que da el coste total del viaje en función que de la velocidad del tractor puede expresarse eono $C(x)=300\left(\dfrac{24,5}{x}+0{,}02x\right)$,

b) Calcula cual es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea minimo. Cual es ese coste

Solución:

a) El tiempo (en horas) que tarda en recorrer 300 km a una velocidad de x *km/h*, viene dada por:

$$t=\frac{d}{v}=\frac{300}{x}$$

El coste del conductor (en €) es:

$$14{,}70\cdot\frac{300}{x}=\frac{4410}{x}$$

El coste del gasóleo (en €) es:

$$1{,}96\cdot\left(5+\frac{x^2}{98}\right)\cdot\frac{300}{x}=\frac{2940}{x}+6x$$

Por tanto, el coste total del viaje es:

$$C(x)=\frac{4410}{x}+\frac{2940}{x}+6x=\frac{7350}{x}+6x,\quad x>0$$

que efectivamente coincide con:

$$C(x)=300\cdot\left(\frac{24{,}5}{x}+0{,}02x\right)\ ,\quad x>0$$

b) $C'(x)=-\dfrac{7350}{x^2}+6$

$C'(x)=0\Rightarrow -\dfrac{7350}{x^2}+6=0\Rightarrow x^2=1225\Rightarrow x=35$ (el negativo no sirve)

Si $0 < x < 35, C\ (x) < 0 \Longrightarrow C\ (x)$ es decreciente
Si $x > 35, C\ (x)\ > 0\ \Longrightarrow C\ x$ es creciente
Luego, para x=35 hay un mínimo relativo que, además es absoluto puesto que C(x) está definida en un intervalo abierto.
$C(35) = 420$
El coste del viaje mínimo es de 420 € y se logra a una velocidad constante de 35 km/h.

101. Rendimiento de un motor El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso x (medido en años) viene dado por la siguiente expresión: $f(x) = \dfrac{50x}{1+x^2} + 50$.

a) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo.

b) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50%?

c) Se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65% a partir del primer año. ¿En qué momento debe reemplazarse?

Solución:

a) Para encontrar el rendimiento máximo, calculamos la primera derivada de $f(x)$ y la igualamos a cero. Usamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{50(1+x^2) - 50x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{50 + 50x^2 - 100x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{50 - 50x^2}{(1+x^2)^2}$$

Igualamos $f'(x)$ a cero:

$$\frac{50 - 50x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 50 - 50x^2 = 0 \Rightarrow 50x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 1$$

Dado que x representa el tiempo en años, $x \geq 0$, por lo que $x = 1$ año. Para verificar que es un máximo, podemos usar el criterio de la primera derivada: Si $x < 1$ (por ejemplo, $x = 0,5$),

$f'(0,5) = \dfrac{50 - 50(0,25)}{(1+0,25)^2} = \dfrac{37,5}{1,5625} > 0$, lo que indica que la función es creciente. Si $x > 1$ (por ejemplo, $x = 2$), $f'(2) = \dfrac{50 - 50(4)}{(1+4)^2} = \dfrac{-150}{25} < 0$, lo que indica que la función es decreciente.

Por lo tanto, $x = 1$ año corresponde a un máximo. El rendimiento máximo es:

$$f(1) = \frac{50(1)}{1+1^2} + 50 = \frac{50}{2} + 50 = 75\%$$

El motor alcanza su rendimiento máximo del 75% al cabo de 1 año.

b) El rendimiento nunca es inferior al 50%. El valor mínimo es 50% (en el inicio).

$$f(x) < 50 \rightarrow \frac{50x}{1+x^2} + 50 < 50 \rightarrow \frac{50x}{1+x^2} = 0$$

Pero para x≥0, 50x≥0 y 1+x^2>0, entonces $\frac{50x}{1+x^2}$≥0. La igualdad a cero ocurre solo en x=0.

Por tanto, f(x)≥50 para todo x≥0, y solo en x=0 vale exactamente 50%.

c) La condición para reemplazar el motor es que el rendimiento sea inferior al 65% a partir del primer año ($x \geq 1$).

$$\frac{50x}{1+x^2}+50=65 \rightarrow 50x=15\left(1+x^2\right) \rightarrow 3x^2-10x+3=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} o\, x=3.$$

$$Como\, x>1; x=3$$

102. Obsolescencia tecnológica La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t)>0$ viene dado por $V(t)=200-\frac{100t}{10+2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a) Calcula el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b) Calcula $V'(t)$ y justifica que $V(t)$ es decreciente. Utiliza esta conclusión y los resultados obtenidos en el apartado anterior para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.

c) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?

Solución:

a) **Valor inicial del producto ($t=0$):**

$$V(0)=200-\frac{100(0)}{10+2(0)}=200-\frac{0}{10}=200 \text{ ¬ €}$$

Valor en un horizonte infinito de tiempo ($\lim_{t\to\infty} V(t)$):

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=\lim_{t\to\infty}\left(200-\frac{100t}{10+2t}\right)$$

Calculamos el límite de la fracción:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{100t}{10+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{100}{10/t+2}=\frac{100}{0+2}=50$$

Por lo tanto, el valor en un horizonte infinito es:

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=200-50=150 \text{ ¬ €}$$

b) Para calcular $V'(t)$, primero derivamos la fracción $\frac{100t}{10+2t}$ usando la regla del cociente.

Sea $u(t)=\frac{100t}{10+2t}$:

$$u'(t)=\frac{100(10+2t)-100t(2)}{(10+2t)^2}=\frac{1000+200t-200t}{(10+2t)^2}=\frac{1000}{(10+2t)^2}$$

Ahora, $V'(t)=\frac{d}{dt}(200-u(t))=-u'(t)$:

$$V'(t)=-\frac{1000}{(10+2t)^2}$$

Para $t \geq 0$, el denominador $(10+2t)^2$ siempre es positivo. Por lo tanto, $V'(t)$ siempre es negativo:

$$V'(t) < 0 \cdot \text{para todo } t \geq 0$$

Esto justifica que $V(t)$ es una función estrictamente decreciente.

Argumento para $V(t) \neq 125$ €: Dado que $V(t)$ es una función estrictamente decreciente, su valor máximo se alcanza en $t = 0$, que es $V(0) = 200$ €. A medida que t aumenta, $V(t)$ disminuye y se acerca asintóticamente a 150 €. Como $V(t)$ siempre es mayor que su límite inferior (150 €) para cualquier t finito, $V(t)$ nunca podrá ser igual a 125 €.

c) Para encontrar el tiempo en que el dispositivo tiene un valor de 175 €, igualamos $V(t)$ a 175:

$$200 - \frac{100t}{10+2t} = 175$$

$$25 = \frac{100t}{10+2t}$$

Multiplicamos ambos lados por $(10+2t)$:

$$25(10+2t) = 100t$$

$$250 + 50t = 100t$$

$$250 = 100t - 50t$$

$$250 = 50t$$

$$t = \frac{250}{50} = 5 \text{ años}$$

El dispositivo tendrá un valor de 175 € después de 5 años.

103. Difusión de una noticia El número de personas que han visto una noticia, t horas después de ser publicada en un periódico digital, viene dado por la función $N(t) = 500000\left(1 - e^{-0,2t}\right)$, $t > 0$.

a) Estudia la monotonía y curvatura de la función.

b) Represéntala gráficamente y describe su tendencia a lo largo del tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas?

d) La velocidad de difusión de dicha noticia (número de personas por hora que la han visto) es $N'(t)$. ¿Qué se deduce al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

Solución:

a) **Monotonía (primera derivada):**

$$N'(t) = \frac{d}{dt}\left[500000\left(1 - e^{-0,2t}\right)\right] = 500000 \cdot \left(0 - (-0,2)e^{-0,2t}\right)$$

$$N'(t) = 500000 \cdot 0,2e^{-0,2t} = 100000e^{-0,2t}$$

Dado que $e^{-0,2t}$ siempre es positivo para cualquier t, $N'(t) > 0$ para todo $t > 0$. Por lo tanto, la función $N(t)$ es estrictamente creciente.

Curvatura (segunda derivada):

$$N''(t) = \frac{d}{dt}\left[100000e^{-0,2t}\right] = 100000 \cdot (-0,2)e^{-0,2t}$$

$$N''(t) = -20000e^{-0,2t}$$

Dado que $e^{-0,2t}$ siempre es positivo, $N''(t) < 0$ para todo $t > 0$. Por lo tanto, la función $N(t)$ es cóncava (abierta hacia abajo).

b) **Representación gráfica y tendencia:** Puntos clave para la gráfica:

- Valor inicial ($t = 0$): $N(0) = 500000(1 - e^0) = 500000(1-1) = 0$. La difusión comienza con 0 personas.
- Límite a largo plazo ($\lim_{t\to\infty} N(t)$): $\lim_{t\to\infty} 500000(1 - e^{-0,2t}) = 500000(1-0) = 500000$. La función tiene una asíntota horizontal en $N = 500000$.

La gráfica de $N(t)$ comienza en 0, aumenta rápidamente al principio y luego la tasa de crecimiento disminuye a medida que se acerca a la asíntota de 500 000 personas. La curva es cóncava, lo que significa que la velocidad de difusión se ralentiza con el tiempo. Tendencia: El número de personas que ven la noticia aumenta con el tiempo, pero la velocidad a la que se difunde disminuye gradualmente. La noticia eventualmente será vista por un máximo de 500 000 personas.

c) Para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas, igualamos $N(t)$ a 450000:

$$500000(1 - e^{-0,2t}) = 450000$$

$$1 - e^{-0,2t} = \frac{450000}{500000} = 0,9$$

$$e^{-0,2t} = 1 - 0,9 = 0,1$$

Aplicamos el logaritmo natural a ambos lados:

$$-0,2t = \ln(0,1)$$

$$t = \frac{\ln(0,1)}{-0,2} = \frac{-\ln(10)}{-0,2} = \frac{\ln(10)}{0,2} = 5\ln(10)$$

$$t \approx 5 \times 2,302585 \approx 11,51 \text{horas}$$

Transcurrirán aproximadamente 11,51 horas para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas.

d) La velocidad de difusión es $N'(t) = 100000e^{-0,2t}$. Comparamos $N'(t)$ en $t = 1$ y $t = 10$:

$$N'(1) = 100000e^{-0,2(1)} = 100000e^{-0,2} \approx 100000 \times 0,8187 \approx 81870 \text{personas / hora}$$

$$N'(10) = 100000e^{-0,2(10)} = 100000e^{-2} \approx 100000 \times 0,1353 \approx 13530 \text{personas / hora}$$

Deducción: La velocidad de difusión de la noticia es significativamente mayor en el instante $t = 1$ hora (aproximadamente 81 870 personas/hora) que en el instante $t = 10$ horas (aproximadamente 13 530 personas/hora). Esto confirma que la función es cóncava y que la tasa de difusión disminuye a medida que pasa el tiempo.

104. Consumo de alcohol Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}\left(-60x^2+160x\right) & \text{si}\, 0\le x\le 2\\ x^2-14x+48 & \text{si}\, 2<x\le 5\end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) Entre las 0 y las 5 horas, ¿el nivel de etanol en sangre se comporta de forma continua? ¿En algún momento el nivel de etanol es nulo? ¿El nivel de etanol aumenta siempre en ese intervalo? ¿En qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de etanol?

b) Si el conductor es novel y el límite permitido para él de etanol en sangre es de 30 mg/dl, ¿podría conducir 1 hora después de la ingesta? ¿Y a las 5 horas? Razona las respuestas.

Solución:

a) **Continuidad:** Ambas partes de la función son polinomios, por lo que son continuas en sus respectivos intervalos abiertos. Necesitamos verificar la continuidad en el punto de unión $x=2$. Calculamos el límite por la izquierda y el valor de la función en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=\frac{10}{3}\left(-60\left(2^2\right)+160(2)\right)=\frac{10}{3}(-240+320)=\frac{10}{3}(80)=\frac{800}{3}\approx 266{,}67\,\text{mg}/\text{dl}$$

Calculamos el límite por la derecha en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2^2-14(2)+48=4-28+48=24\,\text{mg}/\text{dl}$$

Dado que $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, la función no es continua en $x=2$. Por lo tanto, el nivel de etanol en sangre no se comporta de forma continua entre 0 y 5 horas.

Nivel de etanol nulo: Para $0\le x\le 2$: $f(x)=\frac{10}{3}\left(-60x^2+160x\right)=\frac{10}{3}x(-60x+160)$. $f(x)=0$ si $x=0$ o $-60x+160=0\Rightarrow 60x=160\Rightarrow x=\frac{160}{60}=\frac{8}{3}$. $x=0$ está en el intervalo $[0,2]$. $x=8/3\approx 2{,}67$ no está en $[0,2]$. Para $2<x\le 5$: $f(x)=x^2-14x+48$. $f(x)=0\Rightarrow x^2-14x+48=0$. Factorizando, $(x-6)(x-8)=0$. Las soluciones son $x=6$ y $x=8$, ninguna de las cuales está en el intervalo $(2,5]$. Por lo tanto, el nivel de etanol en sangre es nulo solo en el instante inicial $x=0$ horas.

Monotonía (aumento o disminución): Calculamos la primera derivada para cada tramo: Para $0\le x<2$: $f'(x)=\frac{10}{3}(-120x+160)$. Igualamos a cero: $-120x+160=0\Rightarrow 120x=160\Rightarrow x=\frac{160}{120}=\frac{4}{3}$ horas. Si $x<4/3$, $f'(x)>0$ (creciente). Si $x>4/3$, $f'(x)<0$ (decreciente). Para $2<x\le 5$: $f'(x)=2x-14$. Igualamos a cero: $2x-14=0\Rightarrow x=7$. Este valor no está en el intervalo $(2,5]$. Para $x\in(2,5]$, por ejemplo

$x = 3$, $f'(3) = 2(3) - 14 = -8 < 0$. Por lo tanto, en este tramo la función es decreciente.
Conclusión: El nivel de etanol no aumenta siempre en el intervalo $[0,5]$. Aumenta en $[0,4/3)$ y disminuye en $(4/3,2]$ y en $(2,5]$.

Niveles máximo y mínimo de etanol: Consideramos los puntos críticos ($x = 4/3$), los extremos del intervalo ($x = 0, x = 5$) y el punto de discontinuidad ($x = 2$).

- $f(0) = 0$ mg/dl.
- $f(4/3) = \frac{10}{3}\left(-60(4/3)^2 + 160(4/3)\right) = \frac{10}{3}\left(-60(16/9) + 640/3\right) = \frac{10}{3}\left(-\frac{320}{3} + \frac{640}{3}\right) = \frac{10}{3}\left(\frac{320}{3}\right)$

  $= \frac{3200}{9} \approx 355,56$mg/dl. (Máximo local en el primer tramo).
- En $x = 2$: $f(2) = 800/3 \approx 266,67$ (valor por la izquierda). $f(2) = 24$ (valor por la derecha, que es el valor de la función).
- $f(5) = 5^2 - 14(5) + 48 = 25 - 70 + 48 = 3$ mg/dl.

El nivel máximo de etanol en sangre es $f(4/3) = \frac{3200}{9}$mg/dl (aproximadamente 355,56 mg/dl) que se alcanza a las $4/3$ horas. El nivel mínimo de etanol en sangre es $f(0) = 0$mg/dl que se alcanza en el momento inicial $x = 0$ horas.

b) **Capacidad para conducir:** El límite permitido es de 30 mg/dl.

- **1 hora después de la ingesta (**$x = 1$**):**

$$f(1) = \frac{10}{3}\left(-60(1)^2 + 160(1)\right) = \frac{10}{3}(-60 + 160) = \frac{10}{3}(100) = \frac{1000}{3} \approx 333,33\text{mg/dl}$$

  Dado que $333,33\text{mg/dl} > 30$ mg/dl, el conductor NO podría conducir 1 hora después de la ingesta.

- **5 horas después de la ingesta (**$x = 5$**):**

$$f(5) = 5^2 - 14(5) + 48 = 25 - 70 + 48 = 3\text{mg/dl}$$

  Dado que $3\text{mg/dl} < 30$ mg/dl, el conductor SÍ podría conducir 5 horas después de la ingesta.

Un mundo matemático

Actividades

1. Halla la tasa de variación media entre los ejercicios 2013 y 2015, y entre 2017 y 2020.
2. Considera el año 2011 como $x = 1$, el año 2012 como $x = 2$, y así sucesivamente, y utiliza Excel, GeoGebra o cualquier otro software o calculadora gráfica para ajustar una función $f(x)$ polinómica de grado tres que proporcione la cifra de negocio en función de x.
3. Calcula las derivadas primera y segunda de $f(x)$.
4. Determina con el modelo ajustado y $f'(x)$ en qué intervalos aumentaron los resultados y en cuáles disminuyeron. ¿Coinciden con los datos del diagrama de barras?
5. Encuentra el ejercicio en el que los resultados tuvieron una mayor tasa de crecimiento mediante $f'(x)$.
6. Investiga la situación económica en nuestro país desde 2015 a 2020. ¿Existe alguna relación con los datos de El Corte Inglés?
7. Los datos de los últimos años, ¿han provocado cambios en los puestos directivos de El Corte Inglés? ¿Su plan estratégico se ha visto afectado?
8. Investiga en la web de El Corte Inglés la responsabilidad social corporativa en aspectos como la producción y el consumo responsables, la digitalización verde, acciones por el clima, la igualdad, la diversidad y el compromiso social.
9. ¿Cómo realiza El Corte Inglés el reciclaje de residuos electrónicos?

Solución de las actividades

1. Para calcular la tasa de variación media (TVM) entre los ejercicios, se utiliza la fórmula $= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ TVM.
   - Para los ejercicios 2013 y 2015: Los datos de cifra de negocio son $f(2013) = 14\,221$ millones de euros y $f(2015) = 15\,220$ millones de euros. Calcular $\frac{15\,220 - 14\,221}{2015 - 2013}$.
   - Para los ejercicios 2017 y 2020: Los datos de cifra de negocio son $f(2017) = 15\,505$ millones de euros y $f(2020) = 10\,432$ millones de euros. Calcular $\frac{10\,432 - 15\,505}{2020 - 2017}$.
2. Considera el año 2011 como $x = 1$, el año 2012 como $x = 2$, y así sucesivamente, y utiliza Excel, GeoGebra o cualquier otro software o calculadora gráfica para ajustar una función $f(x)$ polinómica de grado tres que proporcione la cifra de negocio en función de x.
3. Mediante Excel el polinomio de grado tres que mejor se ajusta a estos datos es el siguiente:

$$f(x) = -64,477x^3 + 956,91x^2 - 3910,5x + 18883$$

3. Calcula las derivadas primera y segunda de $f(x)$.

La derivada primera es:

$$f'(x) = -193,431x^2 + 1913,82x - 3910,5$$

Y la derivada segunda es:

$$f''(x) = -386,862x + 1913,82$$

4. Determina con el modelo ajustado y f(x) en qué intervalos aumentaron los resultados y en cuáles disminuyeron, ¿coinciden con los datos del diagrama de barras?

Igualamos a cero la derivada primera para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Así:
$f'(x) = 0 \Rightarrow -193,431x^2 + 1913,82x - 3910,5 = 0$, para $x_1 = 2,88 \approx 3$ y $x_2 = 7,01 \approx 7$.
Es decir, aproximadamente los años 2013 y 2017.

Años	2011-2013	2013	2013-2017	2017	2017-2020
Signo de f'(x)/ Puntos críticos	–		+		–
	Decreciente (↘)	Mínimo	Creciente (↗)	Máximo	Decereciente (↘)

Disminuyen las cifras de negocio de 2011 a 2013, alcanzando el mínimo en el año 2013. A su vez, aumentan desde 2013 hasta 2017, logrando el máximo en el año 2017. A partir del año 2017 descienden hasta finalizar el período estudiado en 2020.

Por otra parte, podemos observar que coincide con los datos facilitados en el diagrama de barras.

5. Encuentra el ejercicio en el que los resultados tuvieron una mayor tasa de crecimiento mediente $f'(x)$.

Analicemos en qué punto se anula la derivada segunda $f''(x)$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -386,862x + 1913,82 = 0 \Rightarrow x = 4,95 \approx 5$$

Es decir, el año 2015.

Se puede decir que en el año 2015 ($x = 5$) hay un punto de inflexión y, por tanto, se produjo una mayor tasa de crecimiento.

6. Investiga la situación económica en nuestro país desde el 2015 al 2020. ¿Existe alguna relación con los datos de El Corte Inglés?

   En la tabla siguiente figura la evolución del PIB en España en los años considerados.

Año	PIB annual	Var. PIB (%)
2020	1.121.948 M€	-10,8%
2019	1.244.375 M€	2,1%
2018	1.203.259 M€	2,3%
2017	1.161.867 M€	3,0%
2016	1.113.840 M€	3,0%
2015	1.077.590 M€	3,8%

   El PIB español creció durante estos años, excepto en el año COVID de 2020.

   Como hemos visto en El Corte Inglés hubo un crecimiento entre 2015 y 2017, pero en los años siguientes descendieron las cifras de negocio y no coinciden con el PIB. Obviamente el año 2020 fue malo para todos.

7. Los datos de los últimos años, ¿han provocado cambios en los puestos directivos de El Corte Inglés? ¿Su plan estratégico se ha visto afectado?

   Respuesta abierta que debes encontrar buscando en internet y especialmente en la web de El Corte Inglés.

8. Investiga en la web de El Corte Inglés la responsabilidad social corporativa en aspectos como la producción y consumo responsables, la digitalización verde, acciones por el clima, la igualdad, la diversidad y el compromiso social.

   Respuesta abierta que debes encontrar buscando en internet y especialmente en la web de El Corte Inglés.

9. ¿Cómo realiza El Corte Inglés el reciclaje de residuos electrónicos?

   Respuesta abierta que debes encontrar buscando en internet y especialmente en la web de El Corte Inglés.

Atrévete

Actividades

1. Investiga sobre las innovaciones que se están llevando a cabo a nivel de materiales y configuración de estos.
2. ¿Cuánto deben medir el diámetro y la altura de lata para minimizar los costes?
3. ¿Cuánto costaría entonces?

Solución de las actividades

1. Esta actividad requiere investigación externa sobre las innovaciones en materiales y configuración de latas.
2. Para minimizar los costes de fabricación de una lata cilíndrica de aluminio con un volumen de 33 cl ($0.33\,\text{dm}^3$), se deben seguir los siguientes pasos:

   – **Definir variables:** Sea r el radio de la base y h la altura de la lata.

   – **Establecer la relación auxiliar (volumen):** El volumen de un cilindro es $V=\pi r^2 h$. Dado que el volumen es $0.33\,\text{dm}^3$, la relación auxiliar es $\pi r^2 h = 0.33$. Despejar h en función de r: $h=\dfrac{0.33}{\pi r^2}$.

   – **Formular la función de costes:**

   - El área de la base y la tapa es $2\pi r^2$. El coste de esta parte es $2\pi r^2 \cdot 0.1€\ /\ \text{dm}^2$.
   - El área de la parte circular (lateral) es $2\pi rh$. El coste de esta parte es $2\pi rh \cdot 0.2€\ /\ \text{dm}^2$.
   - La función de coste total $C(r,h)$ es $C(r,h)=0.1\cdot 2\pi r^2+0.2\cdot 2\pi rh=0.2\pi r^2+0.4\pi rh$.

   – **Expresar la función de costes en una sola variable:** Sustituir la expresión de h en la función de costes:

   $$C(r)=0.2\pi r^2+0.4\pi r\left(\frac{0.33}{\pi r^2}\right)=0.2\pi r^2+\frac{0.4\cdot 0.33}{r}=0.2\pi r^2+\frac{0.132}{r}$$

   – **Calcular la derivada de la función de costes:**

   $$C'(r)=\frac{d}{dr}\left(0.2\pi r^2+0.132r^{-1}\right)=0.4\pi r-0.132r^{-2}$$

   – **Encontrar los puntos críticos:** Igualar $C'(r)$ a cero y resolver para r:

   $$0.4\pi r-\frac{0.132}{r^2}=0 \quad 0.4\pi r=\frac{0.132}{r^2}\cdot r^3=\frac{0.132}{0.4\pi}$$

   Calcular el valor de r.

   – **Verificar que es un mínimo:** Calcular la segunda derivada $C''(r)$:

   $$C''(r)=\frac{d}{dr}\left(0.4\pi r-0.132r^{-2}\right)=0.4\pi+0.264r^{-3}$$

Evaluar $C''(r)$ en el valor de r encontrado. Si $C''(r) > 0$, es un mínimo.

– **Calcular la altura y el diámetro:** Una vez obtenido el valor óptimo de r, calcular $h = \frac{0.33}{\pi r^2}$ y el diámetro $D = 2r$.

3. Para calcular el coste mínimo, se debe sustituir el valor óptimo de r (obtenido en la actividad 2) en la función de costes $C(r)$:

$$C(r) = 0.2\pi r^2 + \frac{0.132}{r}$$

Calcular el valor de $C(r)$ con el r óptimo.