SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

4 Polígonos y transformaciones geométricas

Sumario

Atrévete

Tanto los polígonos regulares como las transformaciones de figuras geométricas en el plano se utilizan en arquitectura, diseño, pintura, etc. Se trata de una representación gráfica de las matemáticas para organizar las formas según diferentes criterios, como giros, traslaciones, simetrías, etc.

Maurits Cornelis Escher es un artista conocido por su magistral aplicación de las matemáticas a sus atractivas representaciones gráficas. En sus dos visitas a la Alhambra de Granada, descubrió todo un despliegue de formas geométricas del arte islámico que le sirvieron de inspiración. Esto hace que en su obra lo imposible parezca posible. Entre sus muchos procesos de elaboración está la formación de módulos que se acoplan entre sí partiendo de polígonos regulares que luego, a su vez, forman redes modulares con diferentes transformaciones geométricas en el plano.

Te proponemos realizar tus propios modelos modulares aprendiendo de este gran maestro para aplicarlo al mundo del diseño.

A lo largo de la unidad se señalarán con el icono las actividades que te servirán de soporte para la sección final Atrévete.

Ponte en forma

- En nuestro entorno, podemos encontrar formas geométricas tanto naturales como artificiales. A veces el ser humano geometriza aquello que quiere comprender para reconstruirlo.
- Existen diferentes polígonos regulares que no necesitan estar inscritos en una circunferencia para ser dibujados. Con ellos, además de estructuras arquitectónicas, pueden crearse, por ejemplo, estrellas que pueden transformar los espacios, ya sean vidrieras o revestimientos de edificios, especialmente presentes en época contemporánea.
- Las formas geométricas, a su vez, se pueden convertir en módulos que generan (con transformaciones geométricas en el plano) redes modulares que aportan ritmo y belleza a las superficies.
- Con los polígonos y las transformaciones geométricas en el plano podemos crear diseños bidimensionales para una gran variedad de fines, desde diseños para papeles de regalo hasta estructuras de edificios y jardines.

¿Recuerdas lo que es un polígono? ¿Qué polígonos regulares e irregulares conoces? ¿Qué datos necesitas para dibujarlos?

¿Sabrías decir lo que es un giro, una simetría y una semejanza? Intercambia con tus compañeros y compañeras posibles definiciones.

¿Consideras que vas a encontrar dificultades para identificar diferentes transformaciones geométricas en construcciones arquitectónicas?

¿Crees que vas a tener dificultades para hacer tus propias redes modulares? ¿Cuáles?

POLÍGONOS Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

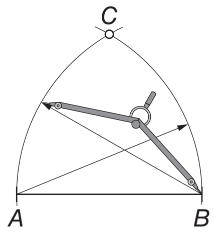
- **Polígonos regulares**
  - Triángulo, Cuadrado, Pentágono, Hexágono, Heptágono, Octógono, Eneágono, Decágono, Endecágono
  - Conocido el lado
    - Métodos particulares
    - Método general
- **Polígonos estrellados**
  - Inscritos en una circunferencia de radio conocido
- **Transformaciones geométricas**
  - Traslación
  - Giro
  - Simetría
  - Semejanza
- **Redes modulares**
  - Poligonales
    - Regulares
    - Semirregulares
    - Irregulares
  - Nazaríes
    - Clavo
    - Hueso
    - Pajarita
    - Pétalo

1 Polígonos regulares

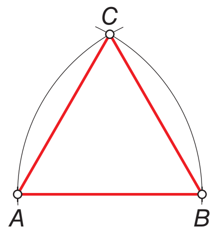
Construcción de polígonos regulares conocido el lado

Triángulo equilátero

1.º Dibuja un segmento $\overline{AB}$ con la medida del lado.



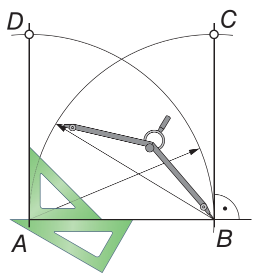
2.º Desde *A* y desde *B*, traza dos arcos con la medida del lado $\overline{AB}$, para obtener el vértice *C*.



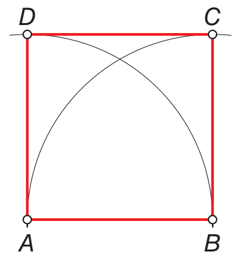
3.º Une *A* y *B* con *C*, para dibujar el triángulo equilátero.

Cuadrado

1.º Dibuja un segmento $\overline{AB}$ con la medida del lado.



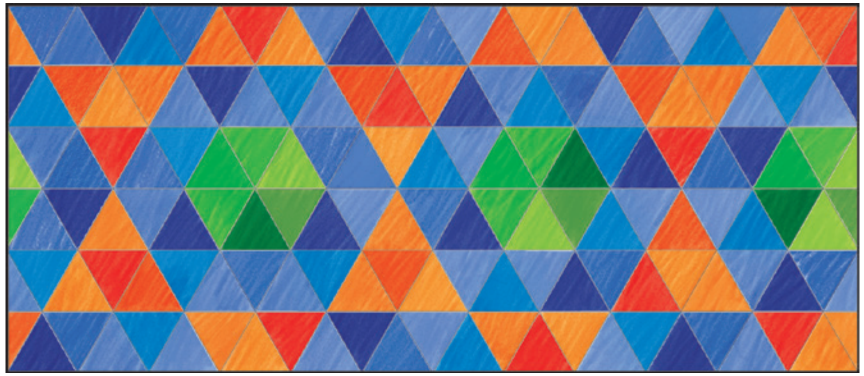
2.º Desde *A* y desde *B*, traza dos perpendiculares y, sobre ellas, marca con un arco el radio $\overline{AB}$.

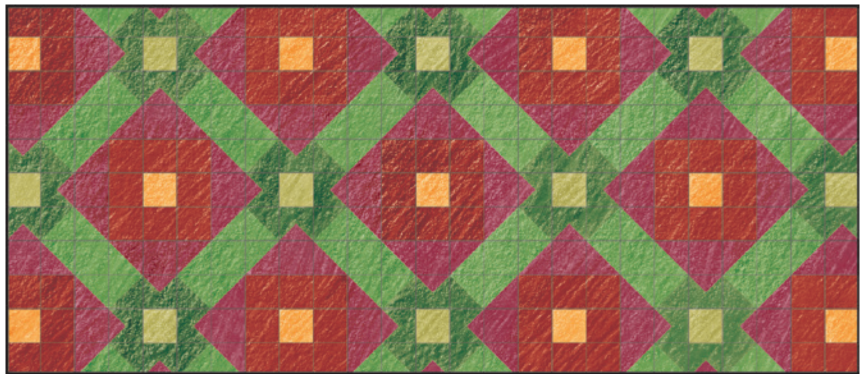


3.º Una vez obtenidos los vértices *C* y *D*, traza el cuadrado.

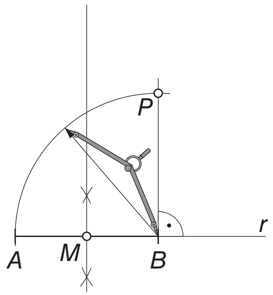
Actividades

1. **Dibuja** una red modular basada en el triángulo equilátero o en el cuadrado. El lado del polígono elegido es l = 1 cm. **Utiliza** lápiz de grafito 2H o 3H, regla, escuadra y cartabón. **Colorea** con lápices de colores.

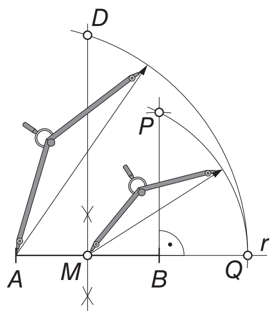




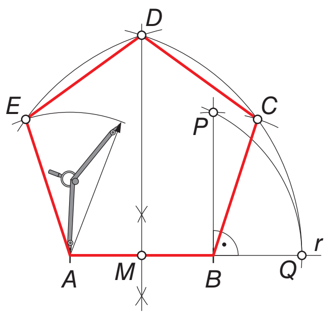
Pentágono



1.º Dibuja el lado $\overline{AB}$ sobre una semirrecta *r*. Desde *B*, traza una perpendicular y, sobre ella, un arco de radio $\overline{AB}$ para obtener *P*.

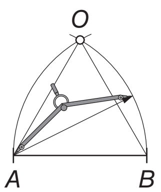


2.º Halla la mediatriz de $\overline{AB}$ y su punto medio *M*. Desde *M* y con radio $\overline{MP}$, traza un arco que corte a la semirrecta en *Q*.

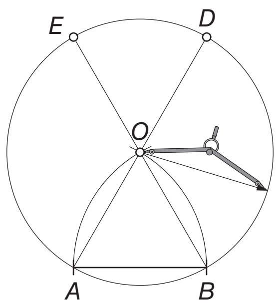


3.º Con radio $\overline{AQ}$, traza un arco que corte a la mediatriz en el vértice *D* y, con radio $\overline{AB}$, halla los vértices *C* y *E*.

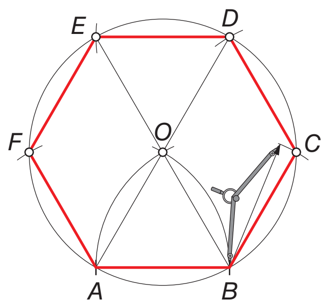
Hexágono



1.º Dibuja un triángulo equilátero con la medida del lado $\overline{AB}$ y vértice *O* (de la circunferencia circunscrita).



2.º Traza una circunferencia con centro en *O* y radio $\overline{AB}$. Prolonga las rectas $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ cortando en *E* y *D* la circunferencia.



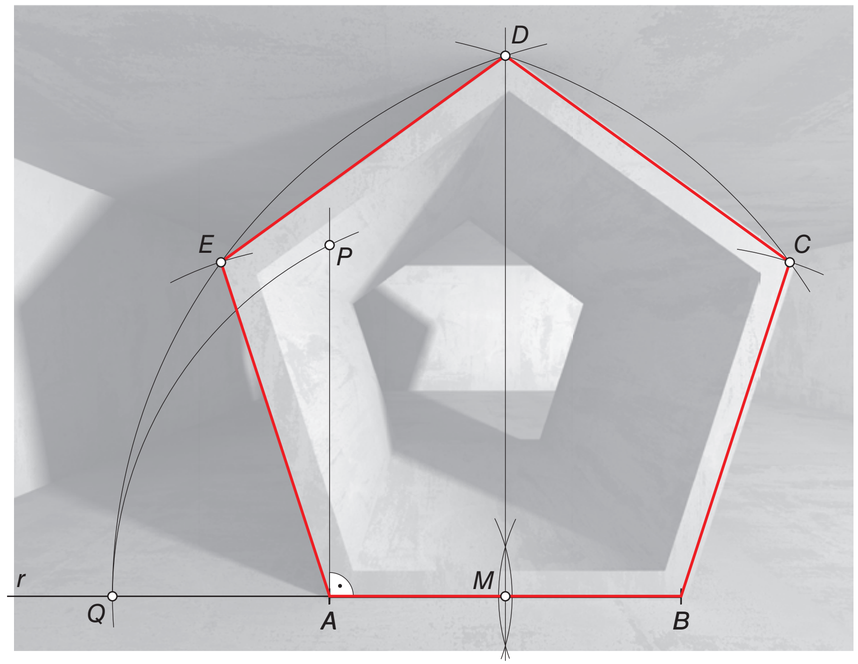
3.º Con centro en los vértices *A* y *B*, halla los puntos *C* y *F*, que completan el hexágono.

Actividades

2. **Observa** la siguiente estructura de hormigón. **Dibuja** el polígono que ves a partir de la medida del lado $\overline{AB}$. **Comprueba** si es regular. Puedes dibujarlo encima de la imagen, siguiendo los pasos estudiados.

¿Es realmente un polígono regular? ¿Por qué?

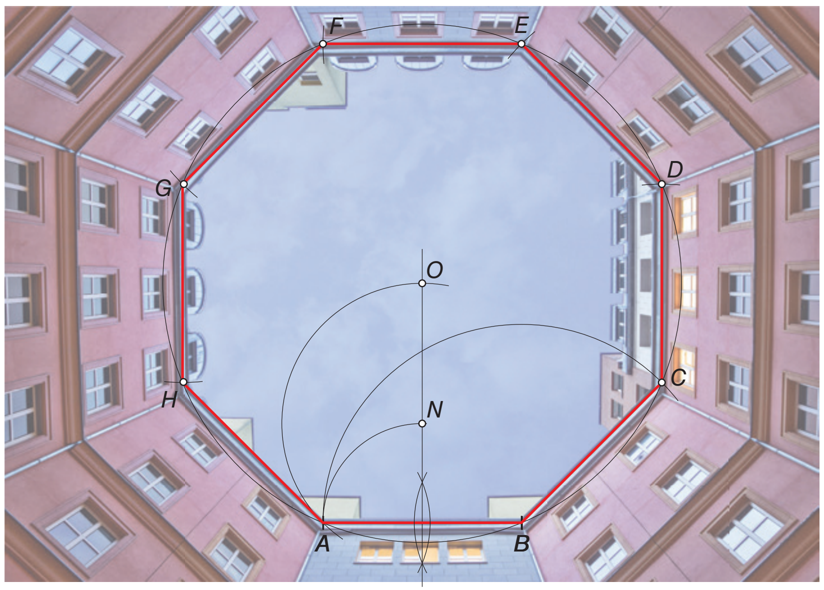
Sí, es un polígono regular porque sus lados y ángulos son iguales (con todo, dependerá de la exactitud del alumno, pues dos de los lados miden 1 mm menos).



Actividades

3. **Dibuja** sobre la siguiente imagen el polígono de lado $\overline{AB}$ que configura este conjunto de edificios. ¿Qué polígono forman?

Un octógono porque tiene ocho lados.

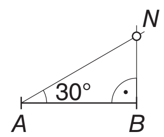


4. **Investiga** en internet imágenes aéreas del Plan Cerdá de Barcelona **y comprueba** cómo el urbanista transforma la trama ortogonal de las manzanas. ¿En qué figura geométrica se convierte? ¿Para qué crees que sirve este esquema geométrico?

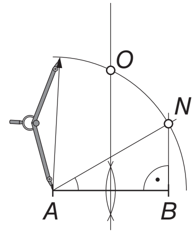
Se convierte en un octógono irregular. Mejora la circulación, la visibilidad y la seguridad para peatones y vehículos.

Este diseño está inspirado en la necesidad de adaptar la ciudad al transporte urbano.

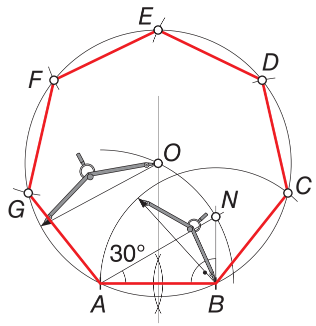
Heptágono



1.º Dibuja el lado $\overline{AB}$. Desde *B* traza una perpendicular y desde *A* traza un ángulo de 30° que corte a la perpendicular en *N*.

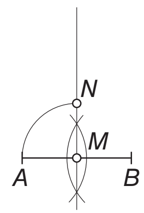


2.º Dibuja la mediatriz de $\overline{AB}$. Con centro en *A* y radio $\overline{AN}$, traza un arco que corte a la mediatriz en O de la circunferencia circunscrita.

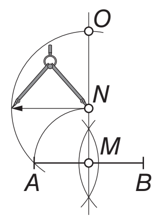


3.º Dibuja la circunferencia con centro en O y radio *OA*. Desde *A* y *B*, traza los vértices del heptágono con radio $\overline{AB}$.

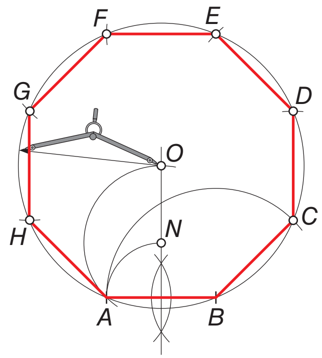
Octógono



1.º Dibuja el lado $\overline{AB}$, halla su mediatriz y punto medio *M*. Traza un arco de radio $\overline{MA}$ que corte a la mediatriz en *N*.

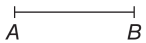


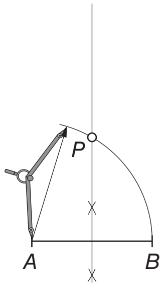
2.º Traza un arco con centro en *N* y radio $\overline{NA}$ que corte a la mediatriz en O de la circunferencia circunscrita.

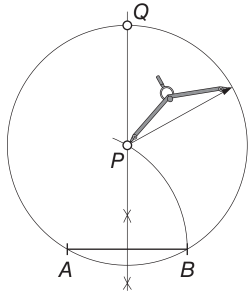


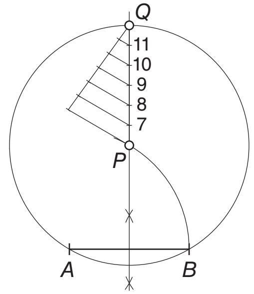
3.º Dibuja la circunferencia circunscrita de radio $\overline{OA}$. A partir de *B* y *A* se trazan los arcos (vértices del octógono).

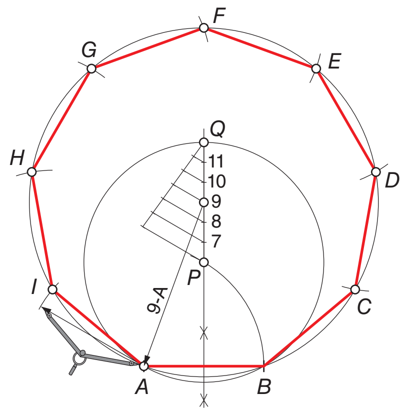
Método general para la construcción de polígonos regulares conocido el lado











1.º Dibuja el lado $\overline{AB}$ y halla su mediatriz. Con centro en *A* y radio $\overline{AB}$, traza un arco que corte a la mediatriz en *P* (origen de la circunferencia circunscrita a un hexágono de lado $\overline{AB}$).

2.º Con centro en *P* y radio $\overline{PA}$, traza una circunferencia que corte a la mediatriz en Q.

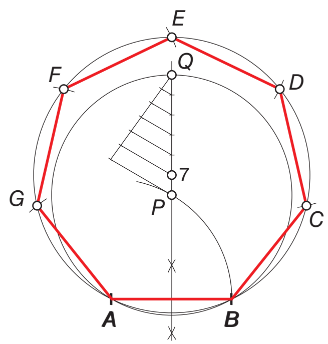
3.º Teniendo en cuenta el teorema de Tales, divide el radio $\overline{PQ}$ en seis partes iguales para obtener los puntos 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Estos son los orígenes de los polígonos que tienen el mismo lado $\overline{AB}$.

4.º Para hacer un eneágono, toma como centro el punto 9 y dibuja la circunferencia de radio $\overline{9A}$. A partir de *A*, lleva con el compás la medida del lado dado, $\overline{AB}$ por la circunferencia 9 veces. Une los vértices para dibujar el polígono de nueve lados.

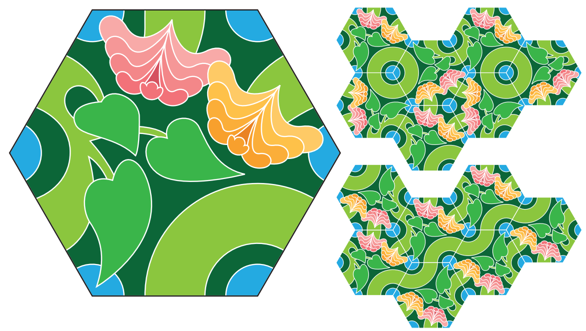
Actividades

5. **Aplica** el método general para hacer un heptágono regular con el lado $\overline{AB}$ dado. **Utiliza** los instrumentos de dibujo.

Heptágono (l7)



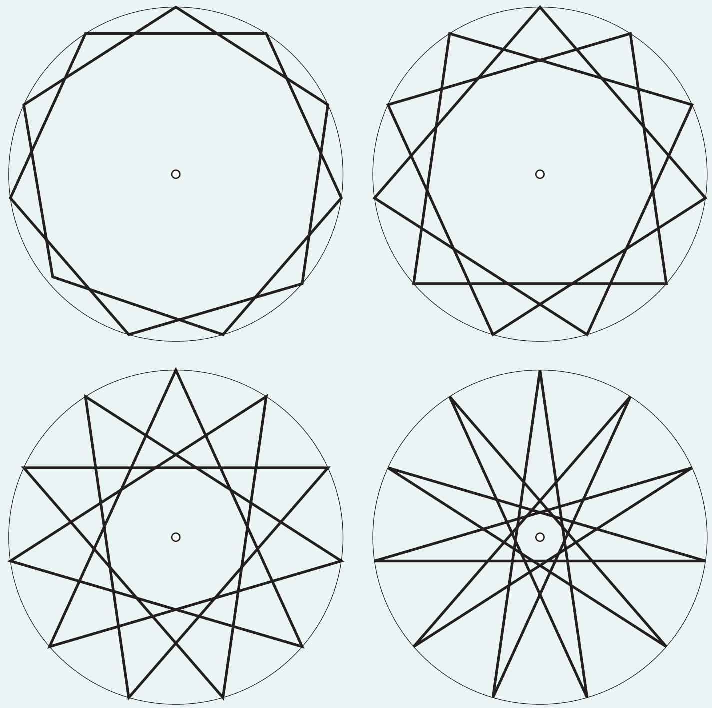
6. **Busca** en internet la baldosa hexagonal diseñada por Antoni Gaudí en 1904 para el interior de la casa Batlló. **Haz tu propia versión** a partir del diseño original.



2 Polígonos estrellados

Estos polígonos se construyen a partir de polígonos regulares inscritos en una circunferencia y tienen más de cuatro vértices. Para dar forma a las estrellas regulares hay que obtener sobre la circunferencia el número de puntas teniendo en cuenta los siguientes números:

- **Género:** número de lados, puntas o vértices.
- **Paso:** número de divisiones de la circunferencia que resultan al unir los vértices del polígono estrellado.
- **Especie:** número de vueltas que se le da a la circunferencia. Este número coincide con la cantidad de polígonos estrellados regulares y distintos que se pueden crear con las mismas divisiones de la circunferencia.



Este endecágono tiene:

Género: L11

Pasos: 2, 3, 4 y 5

Especie: cuatro polígonos regulares estrellados:

2.ª especie (de 2 pasos)

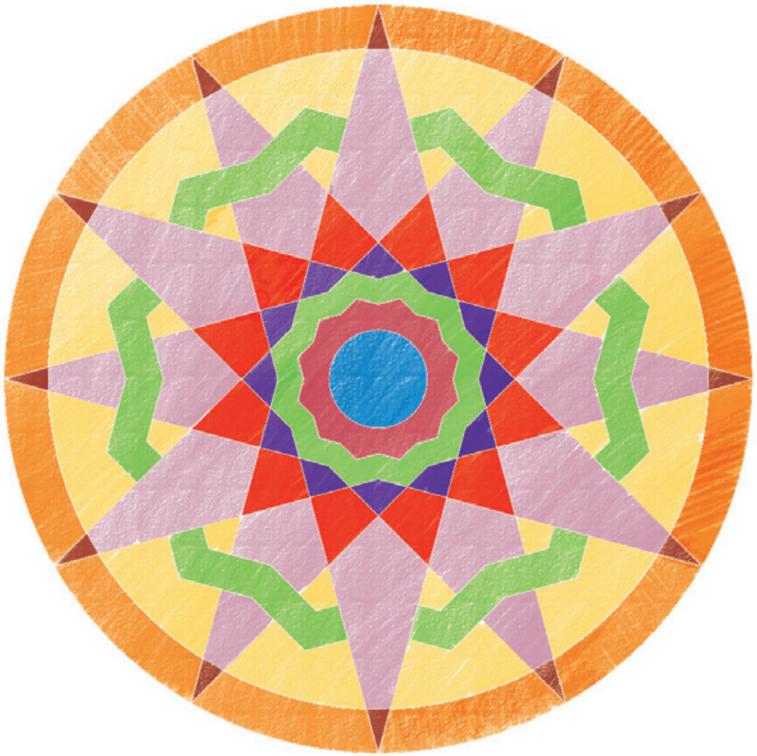
3.ª especie (de 3 pasos)

4.ª especie (de 4 pasos)

5.ª especie (de 5 pasos)

Actividades

7. **Dibuja** un polígono regular estrellado de género L12, con cinco pasos y 5.ª especie. **Decora** libremente con lápices de colores.

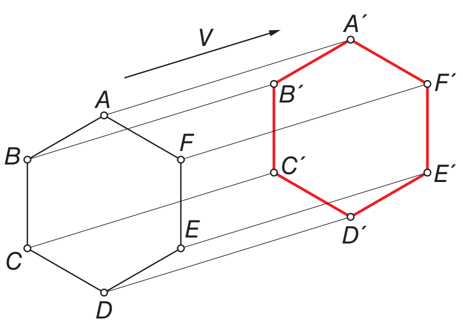


3 Transformaciones geométricas

Las transformaciones geométricas en el plano son **correspondencias entre dos formas.** Se utilizan para producir una nueva figura a partir de otra dada, manteniendo o modificando sus propiedades. Estas operaciones se utilizan en diseño, arquitectura, ingeniería robótica...

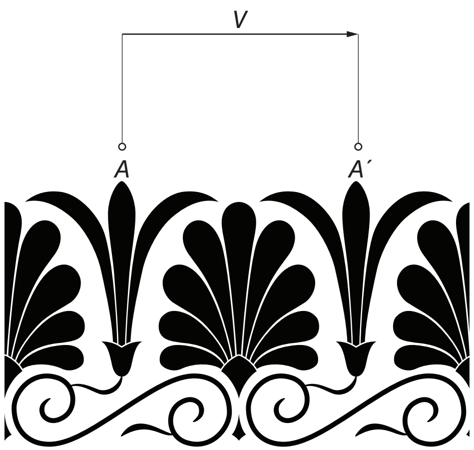
Traslación

Se trata de trasladar una figura según un vector o flecha $v = \overrightarrow{VV'}$. Este movimiento de la figura mantiene su orientación, su forma y su tamaño. La figura desplazada es igual a la transformada.



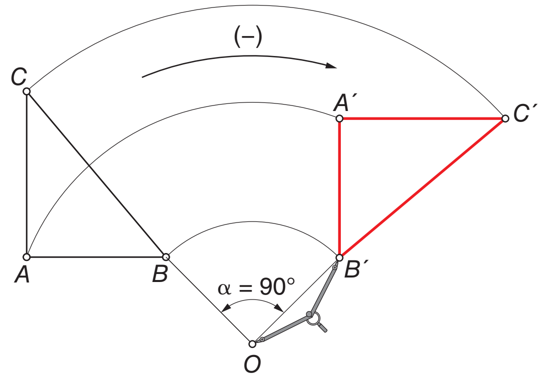
1.º Por el punto *A*, traza una paralela al vector con la misma medida para obtener *A'*.

2.º A cada punto de la figura le corresponde otro punto, que se encuentra en la paralela al vector y a la misma distancia.



Giro

El giro o rotación de una figura se hace en torno a un punto *A* y a un ángulo α dado en sentido circular y a la misma distancia del centro de rotación. Cuando el giro se hace en el sentido de las agujas del reloj, se conoce como negativo y si se hace en sentido contrario, como positivo.



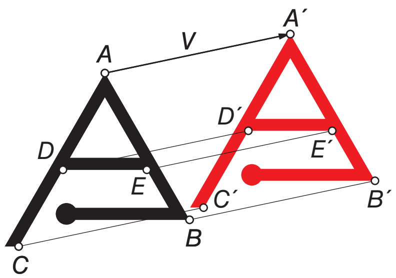
1.º El ángulo $\widehat{BOB'}$ forma el ángulo α de giro. Su sentido (+-) es un dato dado.

2.º Con centro en O y radio $\overline{OB}$, traza un arco que corte la semirrecta del ángulo α en *B'*.

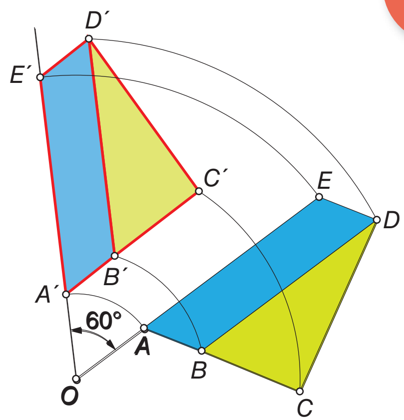
3.º Repite el proceso con cada punto, teniendo en cuenta el ángulo dado.

Actividades

8. **Traslada** la siguiente figura.



9. **Gira** la siguiente figura α = 60° desde O en sentido positivo.



Simetrías

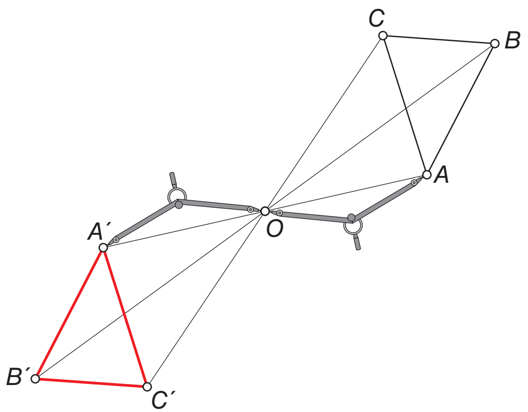
Dos figuras son simétricas si todos sus puntos tienen la misma distancia de traslación a un eje (simetría axial) o a un centro (simetría central).

Simetría axial

Una simetría axial de eje e resulta del movimiento que aplica a un punto *P* del plano, equidistante del eje y del que se obtiene el punto *P'*. Es decir, el eje es la mediatriz de todos los segmentos que relacionan una forma con su simétrica.

Simetría central

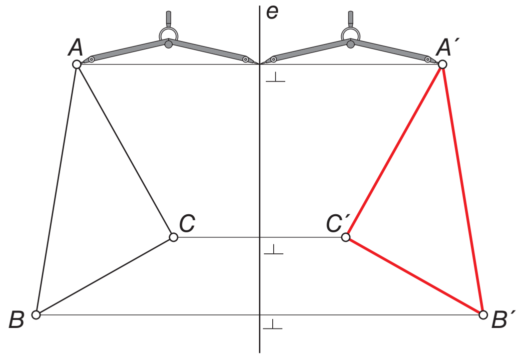
La simetría central tiene un centro de giro O con un ángulo $\alpha = 180°$. Este movimiento hace que todos los puntos de una figura estén a la misma distancia del centro O de simetría una vez realizada la rotación.



1.º Traza semirrectas desde *A*, *B* y *C* pasando por O, el centro de simetría.

2.º Toma con el compás la distancia de cada punto al centro y llévala a otro lado para así obtener *A'*, *B'* y *C'*.

3.º Une los puntos y obtendrás la figura simétrica central.



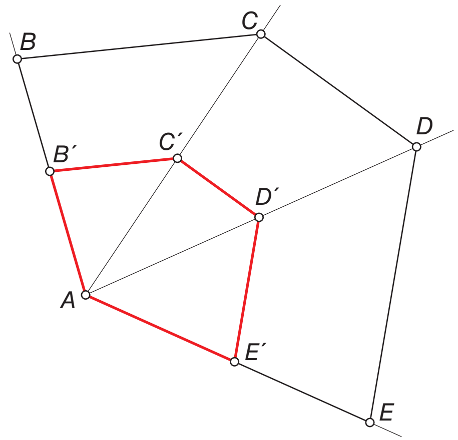
1.º Traza perpendiculares al eje desde *A*, *B* y *C*.

2.º Toma con el compás la distancia de cada punto al eje y llévala al otro lado del eje.

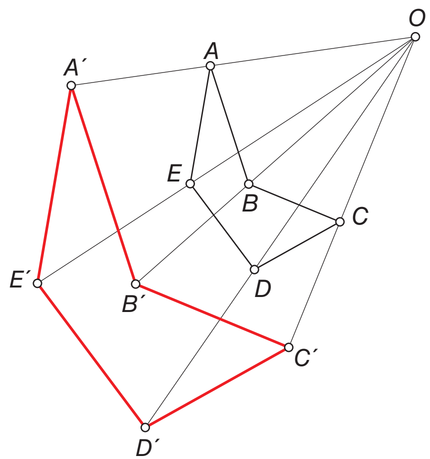
3.º Une los puntos *A´B´C´* y tendrás la figura transformada mediante simetría axial.

Semejanza

Es la transformación de una figura en otra homotética, es decir, en otra figura con los mismos ángulos, pero cuyos lados no son iguales, sino proporcionales. Se transforman por radiación, bien desde un vértice de la figura, o bien desde un punto exterior a la figura.



Desde el vértice *A* de la figura.



Desde un punto *O* exterior de la figura.

Actividades

10. **Identifica** las transformaciones geométricas que aparecen en las siguientes imágenes. **Razona** tu respuesta gráficamente y por escrito.

La transformación geométrica de las columnas es la traslación.

Porque la columna se traslada la misma distancia sin variar sus características.

La transformación geométrica de la fachada es la simetría axial.

Porque las formas se distribuyen a izquierda y derecha con la misma distancia a un eje central.

La transformación geométrica de los mosaicos del arco es el giro.

Porque varían su posición respecto a un centro y un ángulo α de giro.

La transformación geométrica de la vidriera es la simetría central.

Porque las formas iguales se distribuyen con la misma distancia a un centro de simetría.

4 Redes modulares

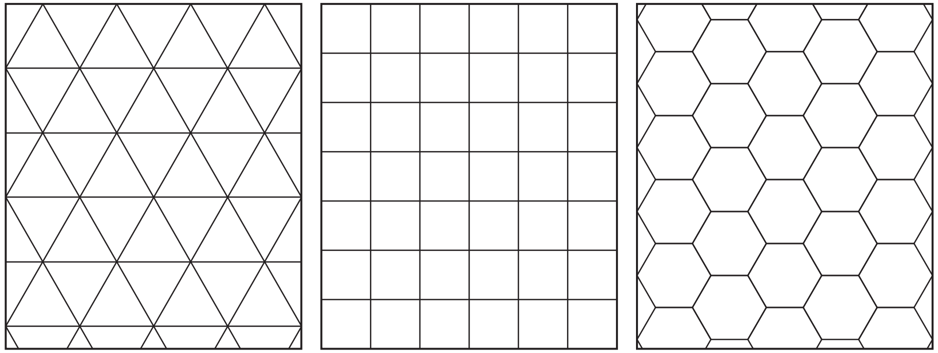
Las **redes** son estructuras con formas geométricas que cubren toda una superficie.

Se llaman «modulares» porque el **módulo** es la forma geométrica que se repite cubriendo la superficie de la red.

4.1. Tipos de redes según su módulo

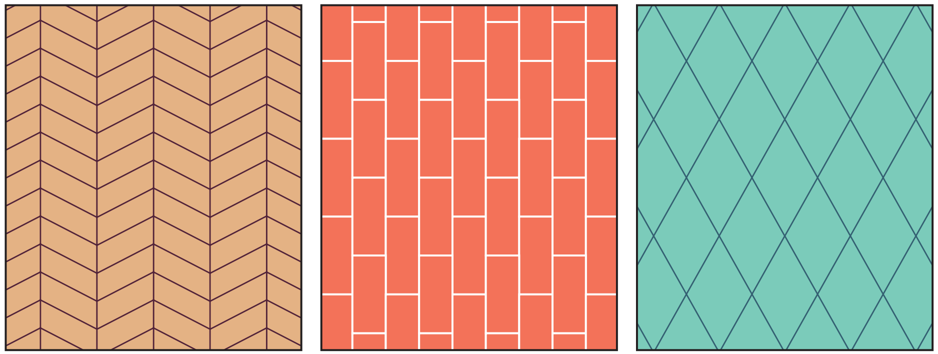
Redes modulares regulares

Solo existen tres tipos de redes modulares regulares construidas con un mismo polígono regular que logre cubrir toda la superficie.



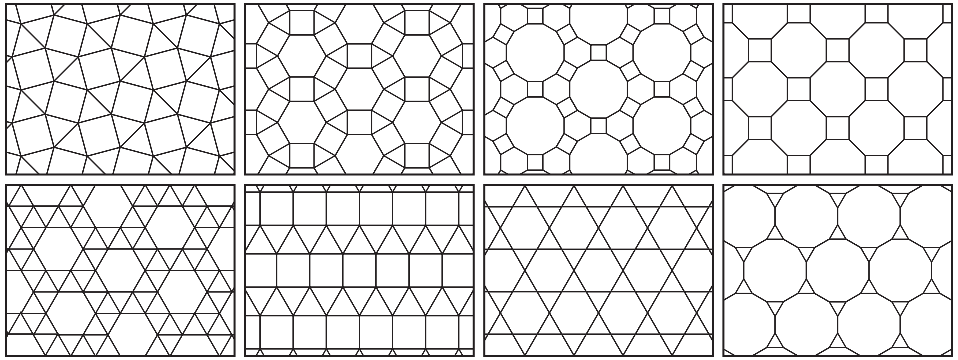
Redes modulares irregulares

Existen infinitas posibilidades de redes irregulares, formadas por una o varias figuras geométricas irregulares que cubren toda la superficie.



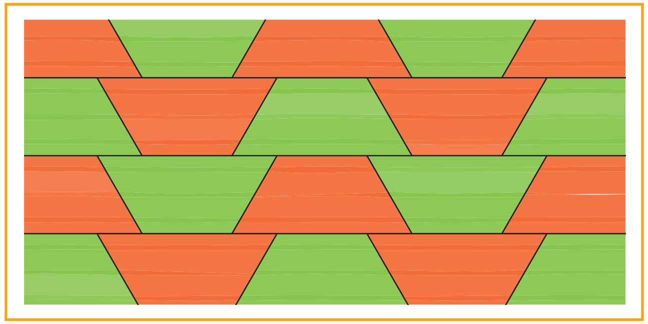
Redes modulares semirregulares

Solo existen ocho tipos de redes modulares semirregulares que cubren toda la superficie con polígonos regulares diferentes.



Actividades

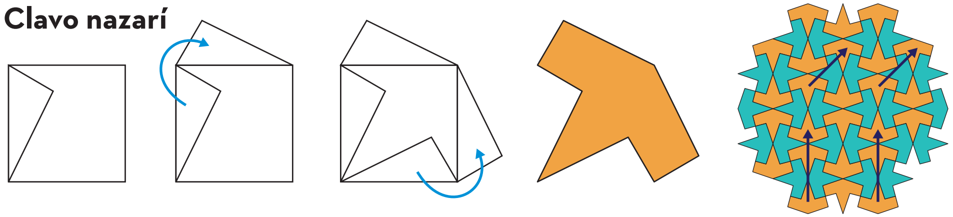
11. **Dibuja** una red modular irregular con escuadra y cartabón. **Colorea** con lápices de colores o rotuladores.



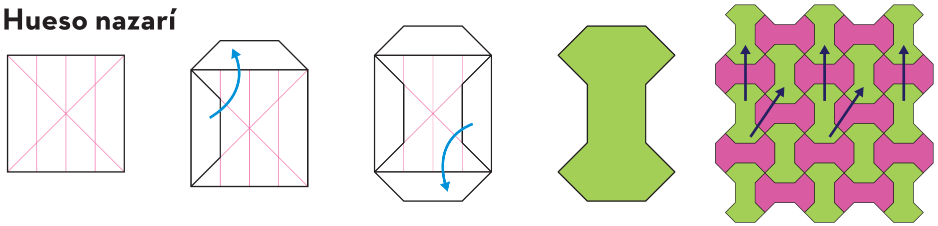
4.2. Módulos nazaríes

Estos módulos parten de polígonos regulares e irregulares con la misma área, pero tienen formas diferentes. Es decir, cada parte que se quita del polígono original se vuelve a añadir cambiado de sitio en el segundo polígono que forma el patrón. Observa, en los siguientes ejemplos, su configuración y transformaciones de giro y traslación en el plano.

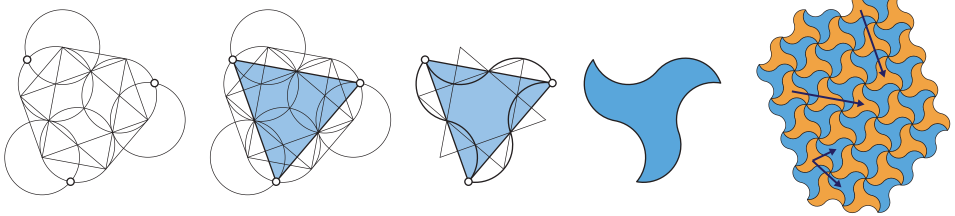
Clavo nazarí



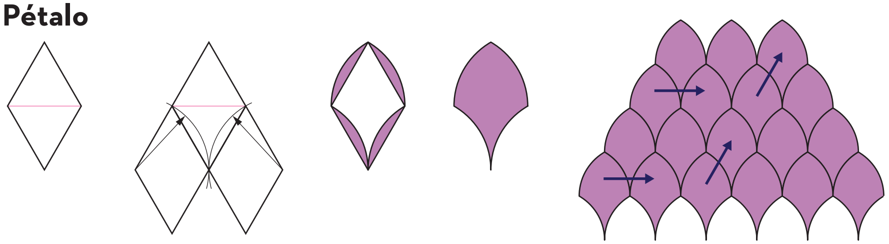
Hueso nazarí



Pajarita

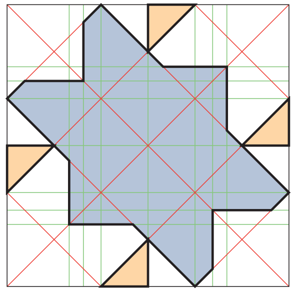


Pétalo



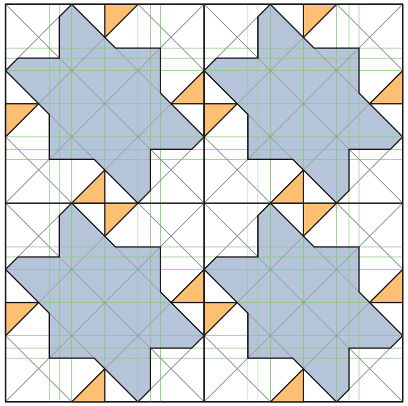
Actividades

12. **Observa** el siguiente módulo nazarí con forma de estrella alargada y pequeñas piezas triangulares en la red modular. Observa también sus colores y transformaciones. **Utiliza** este diseño para practicar algunas transformaciones geométricas, como la traslación y la simetría.

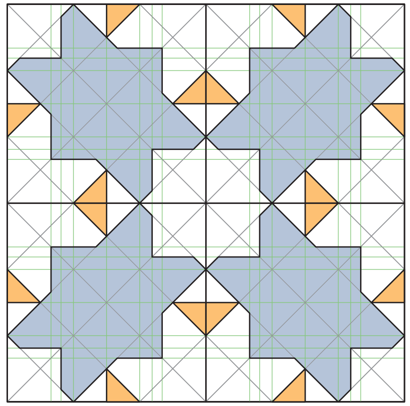


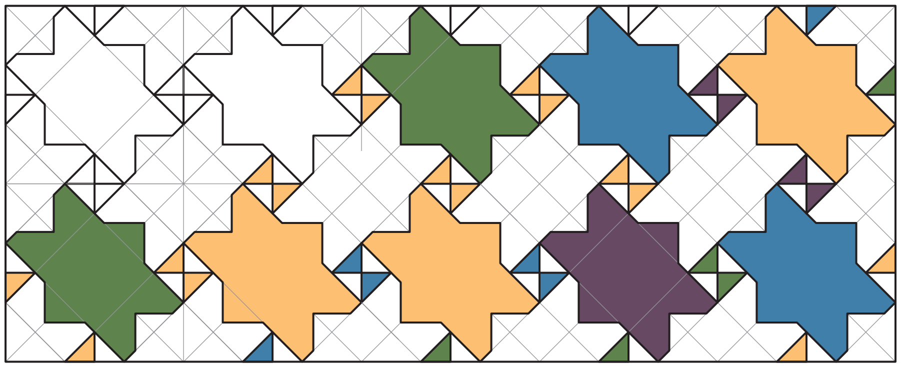
Colorea con lápices de colores.

Traslación:



Simetría:





Patrimonio artístico

Arquitectura clásica: Grecia y Roma

Grecia y Roma sentaron las bases de buena parte de la cultura, el arte y el pensamiento occidentales. Crearon un tipo de arquitectura que fue imitada y desarrollada durante siglos. Podemos verla en palacios y edificios religiosos y públicos de todo tipo. Lo llamamos **arte clásico.**

Grecia

La arquitectura de la antigua Grecia constituyó el canon occidental, el modelo que se debía seguir. Estaba basado en la **proporción,** la **semejanza,** la **simetría,** el **equilibrio** y la **traslación.** Un ejemplo bien conservado es el Templo de la Concordia, en Sicilia, antigua colonia griega (imagen de arriba).

Los griegos crearon los órdenes clásicos —dórico, jónico y corintio—, cada uno con su estilo de columnas y entablamento (las partes superiores del edificio que sostienen las columnas). Puedes observarlos en este enlace: **bit.ly/ordenes_clasicos.**

Roma

La arquitectura romana supone un avance en términos de ingeniería. Partiendo de los modelos griegos, los romanos desarrollaron edificios monumentales con elementos nuevos, como el **arco,** la **bóveda** y la **cúpula,** además de crear materiales nunca usados hasta entonces, como el cemento. Esto les permitió erigir grandiosos edificios.

Esta monumentalidad seguía los mismos principios griegos de proporción, simetría, equilibrio y traslación. Todo ello, sin sacrificar la función del diseño, pues estos edificios se crearon para usos concretos.

Un ejemplo de todo esto puede observarse en el Coliseo de Roma (imagen de abajo): la traslación y el giro de los arcos, así como su simetría axial a dos ejes de la planta en forma de óvalo.

Patrimonio artístico

Actividades

13. Muchos de los motivos ornamentales de la arquitectura están basados en la naturaleza. Un ejemplo de ello son los capiteles de las columnas del orden corintio. Son de la época griega clásica y se basan en las hojas de la planta de acanto, símbolo de inmortalidad. **Busca** imágenes donde se haya interpretado la planta de acanto en el arte.

Observa la forma de las hojas y flores del acanto. **Dibuja** el capitel de una columna basado en esta planta. **Utiliza** la geometría para darle forma y las transformaciones geométricas para elegir la estructura que más te guste. **Fíjate** en la parte superior, que ha de ser cuadrada y plana para soportar el peso del entablamento.

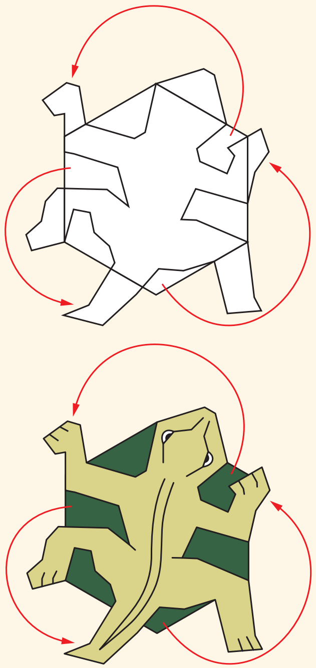
Atrévete

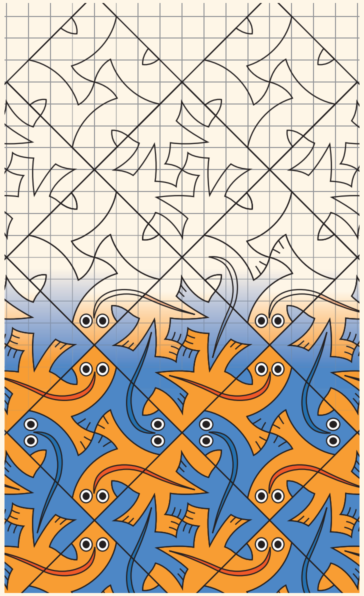
Redes modulares

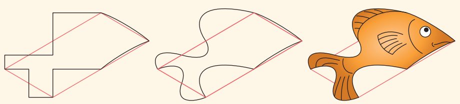
Maurits Cornelis Escher es el maestro de las posibilidades gráficas y expresivas de las matemáticas: **bit.ly/M-C-Escher.**

Observa los siguientes ejemplos. En ellos verás que se parte de un polígono al que se le quita una parte del plano para, mediante giros y traslaciones, colocarlo en otra zona. Os proponemos que, en grupos de cuatro estudiantes, creéis vuestro propio módulo. Cada miembro aportará su idea y después todos podéis trabajar sobre la idea elegida.

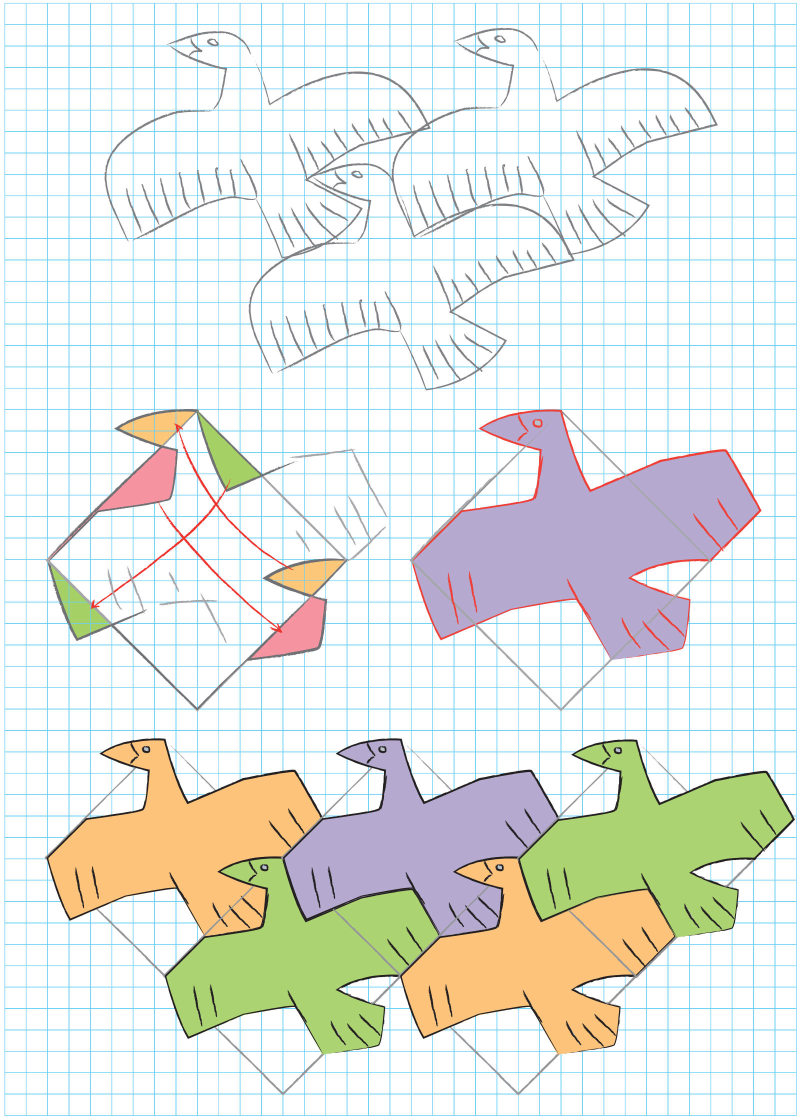
Haced cada uno la red modular elegida con diferentes colores originales y atractivos; podrá ser un diseño de azulejos, telas, baldosas, etc. **Utilizad** las técnicas (tradicionales o digitales) que consideréis más adecuadas.





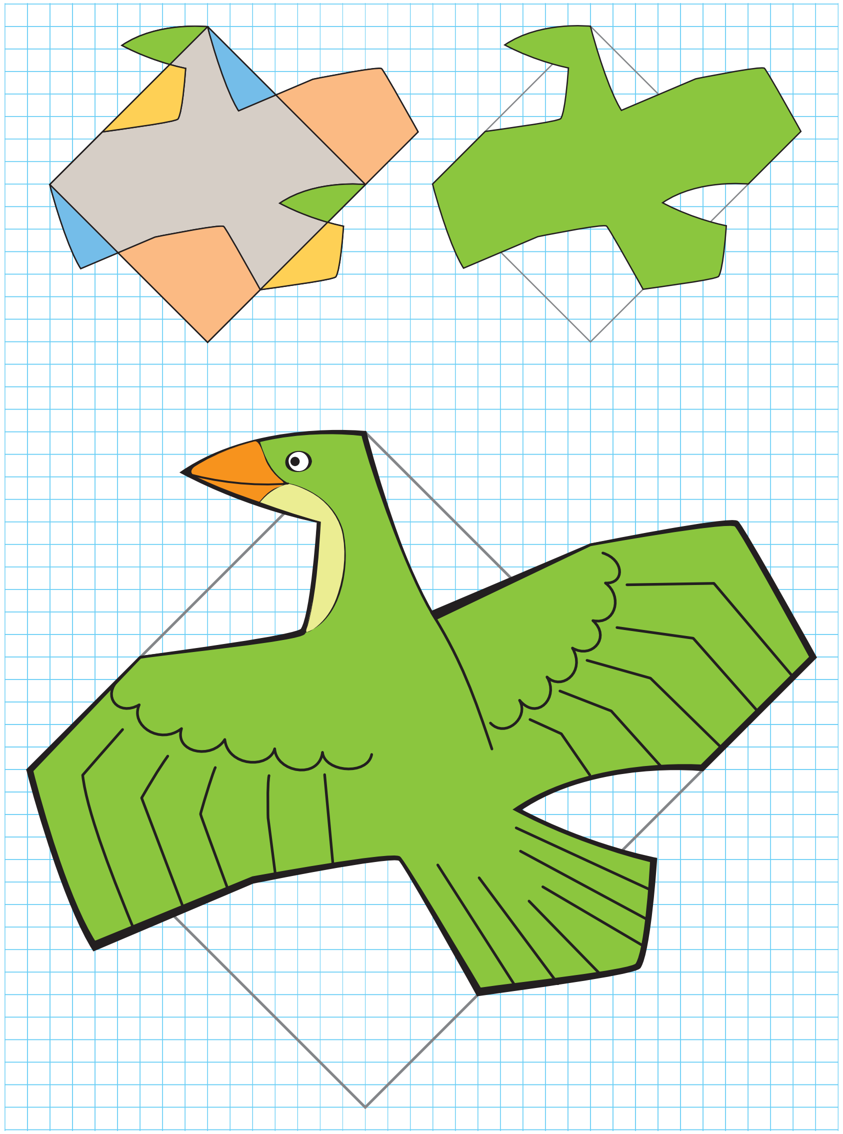


Estudio para hacer el módulo:

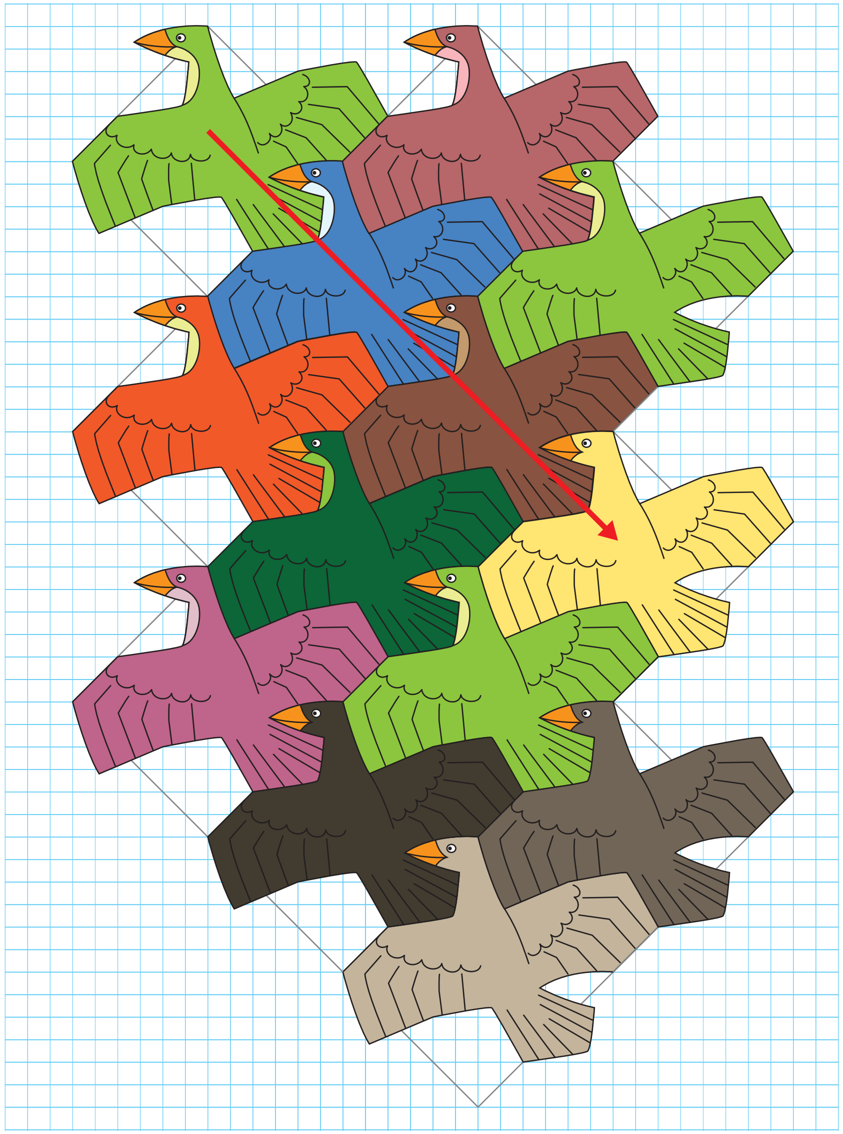


Atrévete

Posibles traslaciones:



Módulo definitivo:



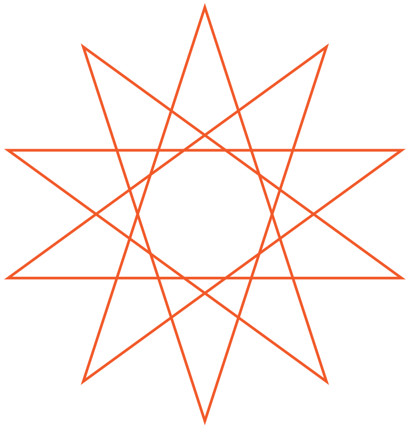
Evalúate

Evalúa tu desempeño con los siguientes colores:

- **Verde:** lo he entendido y lo he hecho a la primera.
- **Azul:** me ha costado un poco, pero lo he conseguido.
- **Naranja:** me ha costado y creo que he cometido algún error.
- **Rojo:** no he terminado de entenderlo y creo que no lo he hecho bien.

4 3 2 1

1. Escribe y define las características de este polígono regular estrellado.



Género: es L10.

porque parte de un decágono regular y tiene 10 vértices.

Pasos: tiene 4 pasos.

porque se saltan cuatro divisiones para unir los vértices.

Especie: 4.ª porque se dan cuatro vueltas a la circunferencia circunscrita para completar la estrella.

4 3 2 1

2. Escribe si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

- Las figuras simétricas tienen la misma distancia de traslación a un eje o un centro.

  Verdadera.

- En la traslación, la figura desplazada es igual a la transformada.

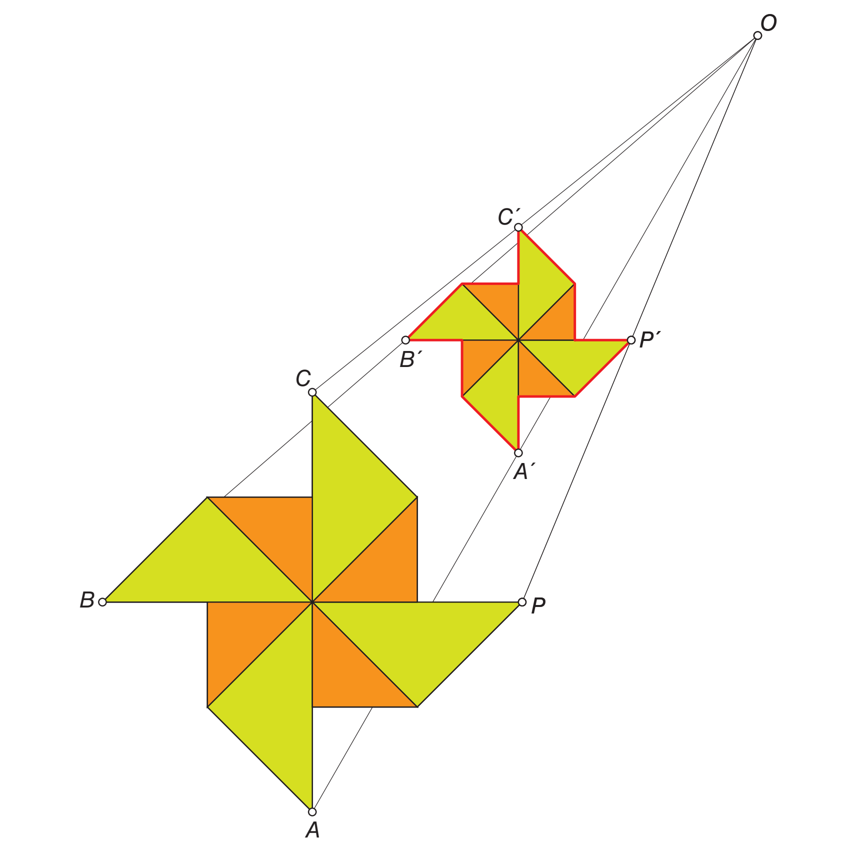
  Verdadera.

- Dos figuras son semejantes cuando son iguales en su forma y tamaño.

  Falsa, son semejantes cuando tienen la misma forma, pero diferente tamaño.

3. Observa la siguiente figura. Está formada por un cuadrilátero que gira sobre sí mismo. **Dibuja y colorea** su transformada semejante según los datos dados gráficamente.

4 3 2 1



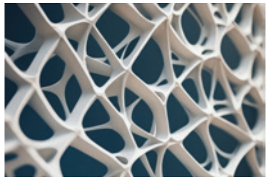
Evalúate

4. **Escribe** el término que corresponde a las siguientes afirmaciones.

- Un polígono regular de nueve lados: eneágono.
- Transformación de una figura en otra que tiene los mismos ángulos, pero sus lados no son iguales, sino proporcionales: semejanza.
- Movimiento que se aplica a una figura equidistante de un eje: simetría axial.

5. **Observa** las siguientes imágenes. **Identifica** el tipo de red modular: si es regular, semirregular o irregular.


Regular


Irregular

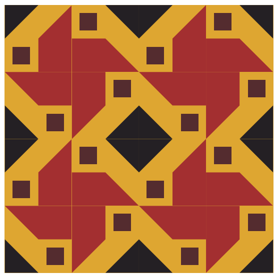

Semirregular

6. **Diseña** un módulo en una red y estudia sus posibilidades gráficas con diferentes transformaciones en el plano. **Elige** la que más te guste y **realiza** una nueva red modular. **Utiliza** rotuladores de colores.

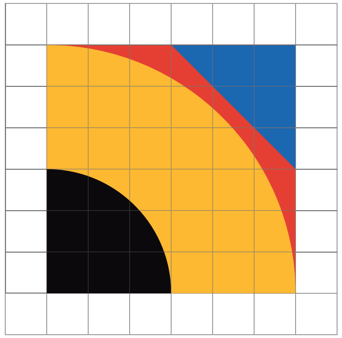

Módulo


Traslación

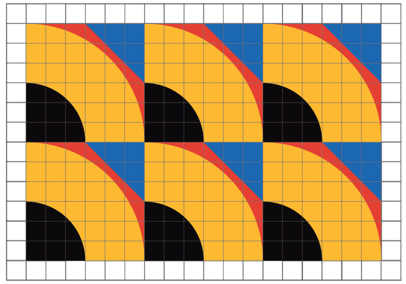

Simetría


Giro

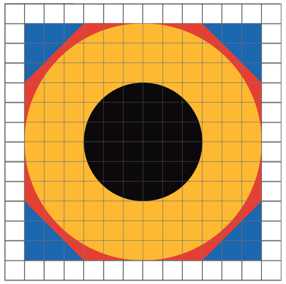
Módulo



Traslación



Simetría



Giro