

Unidad 1 Los números naturales

1. Los números naturales

1. Ordena de menor a mayor:

a. 918, 4, 12, 21, 74, 563, 666

b. 87, 67, 32, 64, 18, 29, 36, 81

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Mesa redonda.

a. Para ordenar los números de menor a mayor, los comparamos:

$$4 < 12 < 21 < 74 < 563 < 666 < 918$$

b. De la misma forma, ordenamos el segundo grupo de números:

$$18 < 29 < 32 < 36 < 64 < 67 < 81 < 87$$

2. Ordena de mayor a menor:

a. 2, 67, 39, 234, 235, 578, 3, 78, 910

b. 678, 325, 278, 674, 821, 472, 230

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Mesa redonda.

a. Para ordenar los números de mayor a menor, los comparamos:

$$910 > 578 > 235 > 234 > 78 > 67 > 39 > 3 > 2$$

b. De la misma forma, ordenamos el segundo grupo de números:

$$821 > 678 > 674 > 472 > 325 > 278 > 230$$

2. Operaciones con números naturales

3. Calcula mentalmente:

a. $43 + 87$

b. $218 + 32$

c. $34 - 11$

d. $345 - 12$

e. $25 \cdot 6$

f. $30 \cdot 12$

g. $488 : 4$

h. $810 : 9$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata.

En esta actividad se deben desarrollar las estrategias propias. Se debería preguntar cuáles han sido los procesos seguidos para encontrar la solución y permitir su verbalización. A modo de ejemplo, se especifican algunas soluciones:

- a. El resultado es 130, porque 87 se convierte en 90 al sumarle las 3 unidades de 43, y 90 más 40 da 130.
- b. El resultado es 250 porque he sumado cifra a cifra.
- c. El resultado es 23 porque he restado 10 y luego 1.
- d. El resultado es 333 porque he restado 10 y luego 2.
- e. El resultado es 150 porque he sumado 6 veces el 25.
- f. El resultado es 360 porque he multiplicado 30 por 10 y he sumado dos veces 30.
- g. El resultado es 122 porque he dividido cada cifra entre 4.
- h. El resultado es 90, porque 81 entre 9 da 9 y deajo el cero.

3. Divisores y múltiplos

4. Encuentra todos los divisores de cada uno de estos números:
10 17 24 30 59 88 90

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos.

- Divisores de 10: 1, 2, 5, 10.
- Divisores de 17: 1, 17.
- Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
- Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
- Divisores de 59: 1, 59.
- Divisores de 88: 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88.
- Divisores de 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

5. Encuentra cinco múltiplos de 13 que cumplan las siguientes condiciones:

- a. Tienen tres cifras.
- b. Son múltiplos de 2.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio

- a. Los posibles múltiplos de 13 de tres cifras son:

104, 117, 130, 143, 156, 169, 182, 195, 208, 221, 234, 247, 260, 273, 286, 299, 312, 325, 338, 351, 364, 377, 390, 403, 416, 429, 442, 455, 468, 481, 494, 507, 520, 533, 546, 559, 572, 585, 598, 611, 624, 637, 650, 663, 676, 689, 702, 715, 728, 741, 754, 767, 780, 793, 806, 819, 832, 845, 858, 871, 884, 897, 910, 923, 936, 949, 962, 975, 988

Cualquier terna construida con ellos es una respuesta válida.

- b. Existen infinitos múltiplos de 13 que son divisibles entre dos, es decir, pares. Si comenzamos multiplicando por 2 y continuamos con el resto de números pares, iremos obteniendo todos los múltiplos de 13 que, a la vez, lo sean de 2. Aquí están los primeros 70:

26, 52, 78, 104, 130, 156, 182, 208, 234, 260, 286, 312, 338, 364, 390, 416, 442, 468, 494, 520, 546, 572, 598, 624, 650, 676, 702, 728, 754, 780, 806, 832, 858, 884, 910, 936, 962, 988, 1014, 1040, 1066, 1092, 1118, 1144, 1170, 1196, 1222, 1248, 1274, 1300, 1326, 1352, 1378, 1404, 1430, 1456, 1482, 1508, 1534, 1560, 1586, 1612, 1638, 1664, 1690, 1716, 1742, 1768, 1794, 1820, 1846, 1872

4. Los números primos

6. ¿Cuál es el número primo de tres cifras más pequeño? ¿Y cuál es el mayor número primo de tres cifras?

Solución

Realizando la criba de Eratóstenes para los primeros 1000 números obtenemos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352
353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384
385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448
449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512
513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544
545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576
577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608
609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672
673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704
705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736
737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768
769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832
833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864
865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896
897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928
929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	1000																								

El primer primo más pequeño de tres cifras es 101. Y el mayor es 997.

También se puede solucionar por descarte. Para el más pequeño, 100 es divisible entre 2 luego no es primo. 101 sí lo es. Para el mayor, 999 es divisible entre 3, luego no es primo. 998 es divisible entre 2, así que tampoco es primo. 997 sí lo es.

5. Descomposición en factores primos

7. Calcula la descomposición en factores primos de estos números:

45 75 56 81 64 92 78 143 693 792 8505

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos.

- $45 = 3^2 \cdot 5$
- $75 = 3 \cdot 5^2$
- $56 = 2^3 \cdot 7$
- $81 = 3^4$
- $64 = 2^6$
- $92 = 2^2 \cdot 23$
- $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
- $143 = 11 \cdot 13$
- $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$
- $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$
- $8505 = 3 \cdot 5 \cdot 567 = 3 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 7 = 3^5 \cdot 5 \cdot 7$

6. Criterios de divisibilidad

8. Escribe un número de tres cifras que sea divisible por 3 y 4, pero que no sea divisible por 5.

Solución

Para que sea divisible por 3 y 4, debe ser divisible por su mínimo común múltiplo, que es 12. Para que no sea divisible por 5, no debe terminar en 0 ni en 5. Buscamos un múltiplo de 12 de tres cifras que no termine en 0 o 5. Por ejemplo:

- $12 \cdot 9 = 108$. 108 es de tres cifras. $1 + 0 + 8 = 9$, que es múltiplo de 3. Sus dos últimas cifras, 08, forman un número múltiplo de 4. No termina en 0 ni en 5. Por tanto, 108 es una solución válida.
- $12 \cdot 11 = 132$.
- $12 \cdot 12 = 144$.

Cualquier múltiplo de 12 de tres cifras que no acabe en 0 es una respuesta válida. Por ejemplo, 108, 132, 144.

7. El mínimo común múltiplo

9. Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

- | | |
|------------|------------|
| a. 4 y 6 | d. 21 y 28 |
| b. 12 y 24 | e. 20 y 35 |
| c. 7 y 35 | f. 15 y 75 |

Solución

a. Múltiplos de 4: 4, 8, **12**, 16... Múltiplos de 6: 6, **12**, 18...

$$\text{mcm}(4, 6) = 12.$$

b. Como 24 es múltiplo de 12, el mcm es 24.

$$\text{mcm}(12, 24) = 24.$$

c. Como 35 es múltiplo de 7, el mcm es 35.

$$\text{mcm}(7, 35) = 35.$$

d. Múltiplos de 21: 21, 42, 63, **84**... Múltiplos de 28: 28, 56, **84**...

$$\text{mcm}(21, 28) = 84.$$

e. Múltiplos de 20: 20, 40, 60, 80, 100, 120, **140**...

Múltiplos de 35: 35, 70, 105, **140**...

$$\text{mcm}(20, 35) = 140.$$

f. Como 75 es múltiplo de 15, el mcm es 75.

$$\text{mcm}(15, 75) = 75.$$

10. Calcula el mínimo común múltiplo de los números de la actividad 9 usando la descomposición en factores primos. Comprueba que obtienes el mismo resultado.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata.

a. $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$. $\text{mcm}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

b. $12 = 2^2 \cdot 3$; $24 = 2^3 \cdot 3$. $\text{mcm}(12, 24) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

c. $7 = 7$; $35 = 5 \cdot 7$. $\text{mcm}(7, 35) = 5 \cdot 7 = 35$.

d. $21 = 3 \cdot 7$; $28 = 2^2 \cdot 7$. $\text{mcm}(21, 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

e. $20 = 2^2 \cdot 5$; $35 = 5 \cdot 7$. $\text{mcm}(20, 35) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$.

f. $15 = 3 \cdot 5$; $75 = 3 \cdot 5^2$. $\text{mcm}(15, 75) = 3 \cdot 5^2 = 75$.

Los resultados coinciden con los de la actividad anterior.

11. En un aeropuerto, dos equipos revisan las luces de las pistas. El primer equipo lo hace cada 6 horas, y el segundo cada 10. Si empezaron las revisiones al mismo tiempo, ¿cada cuántas horas volverán a coincidir?

Solución

Para saber cuándo volverán a coincidir, debemos calcular el mínimo común múltiplo de 6 y 10.

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$\text{mcm}(6, 10) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Volverán a coincidir cada 30 horas.

12. Dos pastelerías producen la misma cantidad de pastelillos de crema al día. En una de ellas los empaquetan en cajas de 24 unidades, y en la otra, en cajas de 100, sin que les sobre ninguno. ¿Cuántos pastelillos de crema produce cada una de las pastelerías como mínimo?

Solución

La cantidad de pastelillos debe ser un múltiplo de 24 y de 100.

Para encontrar la cantidad mínima, calculamos el mínimo común múltiplo de 24 y 100.

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

$$\text{mcm}(24, 100) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 3 \cdot 25 = 600.$$

Cada pastelería produce como mínimo 600 pastelillos de crema.

8. El máximo común divisor

13. Calcula el máximo común divisor de los siguientes pares de números:

a. 4 y 6

d. 21 y 28

b. 12 y 24

e. 20 y 35

c. 7 y 35

f. 15 y 75

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos.

a. $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$. $\text{mcd}(4, 6) = 2$.

b. $12 = 2^2 \cdot 3$; $24 = 2^3 \cdot 3$. $\text{mcd}(12, 24) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

c. $7 = 7$; $35 = 5 \cdot 7$. $\text{mcd}(7, 35) = 7$.

d. $21 = 3 \cdot 7$; $28 = 2^2 \cdot 7$. $\text{mcd}(21, 28) = 7$.

e. $20 = 2^2 \cdot 5$; $35 = 5 \cdot 7$. $\text{mcd}(20, 35) = 5$.

f. $15 = 3 \cdot 5$; $75 = 3 \cdot 5^2$. $\text{mcd}(15, 75) = 3 \cdot 5 = 15$.

14. Dos granjas ecológicas se unen para comercializar sus lechugas. Una de ellas produce 36 lechugas a la semana, y la otra, 42. Quieren empaquetarlas en cajas iguales, de manera que cada caja tenga el mayor número posible de lechugas y no sobre ninguna.
- a. ¿Cuántas lechugas habrá en cada caja?
 - b. ¿Cuántas cajas necesitarán en total cada mes?

Solución

- a. El número de lechugas por caja debe ser el máximo común divisor de 36 y 42.

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{mcd}(36, 42) = 2 \cdot 3 = 6.$$

En cada caja habrá 6 lechugas.

- b. La primera granja produce 36 lechugas/semana, por lo que llena $36 : 6 = 6$ cajas/semana.

La segunda granja produce 42 lechugas/semana, por lo que llena $42 : 6 = 7$ cajas/semana.

En total, a la semana necesitan $6 + 7 = 13$ cajas.

Un mes tiene aproximadamente 4 semanas, así que necesitarán $13 \cdot 4 = 52$ cajas al mes.

9. El número 1

15. Di si estos pares de números son primos entre sí:

a. 55 y 24

d. 82 y 123

b. 75 y 36

e. 45 y 28

c. 21 y 22

f. 51 y 68

Solución Dos números son primos entre sí si su máximo común divisor es 1.

- a. $55 = 5 \cdot 11$; $24 = 2^3 \cdot 3$. No tienen factores comunes. $\text{mcd}(55, 24) = 1$.

Sí son primos entre sí.

- b. $75 = 3 \cdot 5^2$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tienen el factor común 3. $\text{mcd}(75, 36) = 3$.

No son primos entre sí.

- c. $21 = 3 \cdot 7$; $22 = 2 \cdot 11$. No tienen factores comunes. $\text{mcd}(21, 22) = 1$.

Sí son primos entre sí.

d. $82 = 2 \cdot 41$; $123 = 3 \cdot 41$.

Tienen el factor común 41. $\text{mcd}(82, 123) = 41$. No son primos entre sí.

e. $45 = 3^2 \cdot 5$; $28 = 2^2 \cdot 7$.

No tienen factores comunes. $\text{mcd}(45, 28) = 1$. Sí son primos entre sí.

f. $51 = 3 \cdot 17$; $68 = 2^2 \cdot 17$.

Tienen el factor común 17. $\text{mcd}(51, 68) = 17$. No son primos entre sí.

16. Construye:

a. Dos números cuyo máximo común divisor sea 1.

b. Tres números cuyo máximo común divisor sea 1.

c. Dos números cuyo mínimo común múltiplo sea 32 y cuyo máximo común divisor sea 1.

Solución

a. Por ejemplo, 8 y 9. $8 = 2^3$ y $9 = 3^2$.

No tienen factores comunes, $\text{mcd}(8, 9) = 1$.

b. Por ejemplo, 7, 10 y 13.

Son dos números primos y un número compuesto que no comparte factores con ellos. $\text{mcd}(7, 10, 13) = 1$.

c. Para que el mcm sea 32, los números deben estar formados solo por potencias de 2, con la mayor potencia siendo $2^5 = 32$.

Para que el mcd sea 1, no pueden tener factores comunes.

Esto es imposible si ambos números son potencias de 2, a menos que uno de ellos sea $2^0 = 1$.

Por tanto, los números son 1 y 32. $\text{mcm}(1, 32) = 32$. $\text{mcd}(1, 32) = 1$.

Te proponemos un reto

1. Investiga cuáles son los tres números siguientes en cada una de las series anteriores. Haz una tabla como esta:

Orden	Triangulares	Cuadrados	Pentagonales
1	1	1	1
2	3	4	6
...

Piensa y contesta:

- ¿Cuál es el patrón de la serie de números triangulares?
- ¿Y la de los números cuadrados?
- ¿Y la de los pentagonales? ¿Qué relación tiene con los números triangulares?
- ¿Encuentras alguna relación entre las columnas de la tabla?

Puedes utilizar un juego de construcción magnético para ayudarte a visualizar estos números.

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Lectura puzle

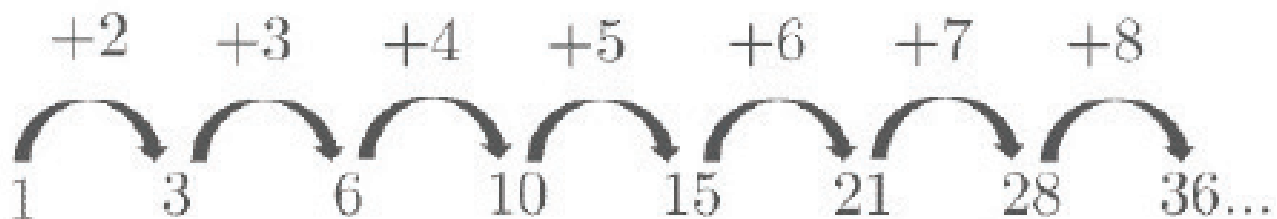
Solución:

Esta propuesta pretende que el alumnado identifique patrones en las cantidades numéricas de los puntos que construyen polígonos. No se trata tanto de que lleguen a encontrar la fórmula que nos proporciona la cantidad de puntos necesarios para hacer cada polígono en el punto n ésimo de la sucesión, como de que aprendan a clasificar y a identificar patrones.

Números triangulares. Este es un caso cuya fórmula resulta:

$$T_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Lo interesante es ver cómo se construye o se observa lo que pasa entre los números. Mediante un diagrama en el que se vean los diferentes términos de la sucesión, se puede intuir la regla de formación:



Siempre se suma una más que en el caso anterior. Esto se puede observar en la siguiente tabla:

Número de término	Término
1	1
2	3 = 1 + 2
3	6 = 1 + 2 + 3
4	10 = 1 + 2 + 3 + 4
5	15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5
6	21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
7	28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
8	36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8

Cada término de la sucesión es igual a la suma de n números naturales, siendo n el número del término de la sucesión. En una progresión aritmética, la suma de los n primeros términos se calcula como:

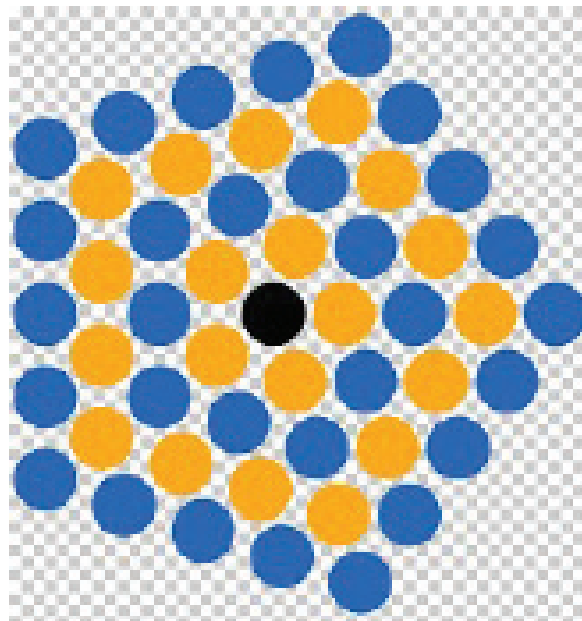
$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

En este caso, la progresión es la de los números naturales, cuya diferencia es 1 y cuyo término enésimo vale n . Por tanto $a_1 = 1$ y $a_n = n$. Sustituyendo en la fórmula, se puede ver que se obtiene la fórmula general.

Números cuadrados. Se puede comenzar por este caso, ya que quizás resulte más familiar al alumnado. Los puntos que rellenan el cuadrado, tal y como están dispuestos, representan su área. Realizando una sencilla tabla se puede ver que la fórmula del término general es:

$$Q_n = n^2$$

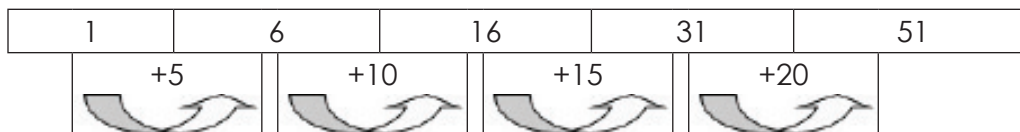
Números pentagonales. La construcción de las figuras pentagonales que aparecen en la actividad representa los números pentagonales centrados. Se ha escogido esta representación concreta para facilitar la comprensión de la regla de formación. Esta sucesión es también un número figurado, y resulta adecuada para esta actividad en tanto en cuanto persigue que el alumnado se ejercite en la búsqueda de patrones numéricos. En la siguiente figura se puede visualizar el quinto término:



La fórmula del término general es:

$$P_n = 1 + \frac{5n^2 + 5n}{2}$$

Se puede observar que, en cada término, el número de puntos aumenta en un múltiplo de 5, calculado a partir del orden del término.



En la siguiente tabla se muestra cómo se construyen:

Número del término	Término
1	1
2	$6 = 1 + 5$
3	$16 = 6 + 10 = 1 + 5 + 2 \cdot 5 = 1 + 5 \cdot (1 + 2)$
4	$31 = 16 + 15 = 1 + 5 + 2 \cdot 5 = 1 + 5 \cdot (1 + 2 + 3)$
5	$51 = 31 + 20 = 1 + 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 1 + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$

Las sumas parciales de los n primeros números naturales se ha calculado para encontrar los números triangulares y, además, coincide con ellos. Así, se obtiene que:

$$P_n = 1 + 5 \cdot T_n$$

Sustituyendo T_n en la anterior expresión, se calcula fácilmente la fórmula general.

Actividades finales

Los números naturales

1. Ordena de menor a mayor:

a. $99, 1, 647$

b. $239, 9, 34$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Mesa redonda.

a. $1 < 99 < 647$

b. $9 < 34 < 239$

2. Ordena de mayor a menor:

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Mesa redonda.

a. $45, 89, 12, 56, 93, 24$

b. $854, 827, 925, 921, 872$

Solución

a. $93 > 89 > 56 > 45 > 24 > 12$

b. $925 > 921 > 872 > 854 > 827$

3. Ordena de menor a mayor:

a. $87, 63, 86, 98, 23, 85$

b. $435, 456, 765, 932, 123$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Mesa redonda.

a. $23 < 63 < 85 < 86 < 87 < 98$

b. $123 < 435 < 456 < 765 < 932$

4. Con los dígitos, 1, 1, 2, 3, 5, 5 y 6, construye un número de cuatro cifras que cumpla la condición indicada en cada caso:

a. Que sea el más pequeño posible.

b. Que sea el más grande posible.

c. Que sea mayor que 3000 y menor que 5000.

Solución

- a. Para el más pequeño, usamos las cifras más bajas al principio: 1123.
- b. Para el más grande, usamos las cifras más altas al principio: 6553.
- c. Para que sea mayor que 3000 y menor que 5000, la primera cifra debe ser 3. Para las siguientes, usamos las cifras restantes más altas para maximizar el número, o las más bajas para minimizarlo. Un ejemplo podría ser 3112, 3115, 3125, 3126, etc. Una respuesta válida es 3125.

Operaciones con números naturales

5. Calcula mentalmente:

- a. $86 + 32$
- b. $96 - 45$
- c. $14 \cdot 5$
- d. $28 : 7$
- e. $54 + 71$
- f. $78 - 32$
- g. $21 \cdot 7$
- h. $86 : 2$
- i. $53 + 53$
- j. $63 - 21$
- k. $56 \cdot 3$
- l. $55 : 5$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata.

- a. 118
- b. 51
- c. 70
- d. 4
- e. 125
- f. 46
- g. 147

- h. 43
- i. 106
- j. 42
- k. 168
- l. 11

6. Calcula:

- a. $87 + 45$
- b. $82 - 19$
- c. $321 \cdot 2$
- d. $121 : 11$
- e. $43 + 99$
- f. $73 - 25$
- g. $99 \cdot 5$
- h. $324 : 4$
- i. $134 + 77$
- j. $54 - 28$
- k. $83 \cdot 11$
- l. $108 : 9$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata.

- a. 132
- b. 63
- c. 642
- d. 11
- e. 142
- f. 48
- g. 495
- h. 81
- i. 211

- j. 26
- k. 913
- l. 12

7. Multiplica:

- a. $22 \cdot 10$
- b. $13 \cdot 100$
- c. $30 \cdot 1000$
- d. $234 \cdot 10$
- e. $150 \cdot 100$
- f. $414 \cdot 1000$

Solución

- a. 220
- b. 1300
- c. 30 000
- d. 2340
- e. 15 000
- f. 414 000

8. Divide:

- a. $120 : 10$
- b. $200 : 100$
- c. $13\ 000 : 1000$
- d. $500 : 10$
- e. $7000 : 100$
- f. $60\ 000 : 1000$

Solución

- a. 12
- b. 2
- c. 13

- d. 50
- e. 70
- f. 60

9. Multiplicar mentalmente por 11 es igual que multiplicar el número por 10 y, al resultado, sumarle el número original:

$$23 \cdot 11 = 23 \cdot 10 + 23 = 230 + 23 = 253.$$

Calcula mentalmente como en el ejemplo:

- a. $35 \cdot 11$
- b. $16 \cdot 11$
- c. $42 \cdot 11$

Solución

- a. $35 \cdot 10 + 35 = 350 + 35 = 385$
- b. $16 \cdot 10 + 16 = 160 + 16 = 176$
- c. $42 \cdot 10 + 42 = 420 + 42 = 462$

10. Multiplicar mentalmente por 25 es igual que multiplicar el número por 100 y, después, dividir el resultado entre

$$4: 12 \cdot 25 = 12 \cdot 100 : 4 = 1200 : 4 = 300.$$

Calcula mentalmente como en el ejemplo:

- a. $20 \cdot 25$
- b. $32 \cdot 25$
- c. $16 \cdot 25$
- d. $24 \cdot 25$

Solución

- a. $20 \cdot 100 : 4 = 2000 : 4 = 500$
- b. $32 \cdot 100 : 4 = 3200 : 4 = 800$
- c. $16 \cdot 100 : 4 = 1600 : 4 = 400$
- d. $24 \cdot 100 : 4 = 2400 : 4 = 600$

11. Realiza las siguientes operaciones combinadas teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones:

- a. $5 \cdot 6 : 2$

- b. $10 + 5 \cdot 3$
- c. $(12 + 3) \cdot 6 - 45$
- d. $3 \cdot 2 - 5 + 4 \cdot 3 - 8$

Solución

- a. $30 : 2 = 15$
- b. $10 + 15 = 25$
- c. $15 \cdot 6 - 45 = 90 - 45 = 45$
- d. $6 - 5 + 12 - 8 = 1 + 12 - 8 = 13 - 8 = 5$

12. En un aeropuerto aterriza un avión cada 10 minutos. ¿Cuántos aviones aterrizan en una hora? ¿Y en un día?

Solución Una hora tiene 60 minutos.

$60\text{min} : 10\text{min} / \text{avión} = 6$ aviones en una hora.

Un día tiene 24 horas.

$24\text{horas} \cdot 6 \text{aviones} / \text{hora} = 144$ aviones en un día.

13. Una librería ha comprado 45 libros a 12 € cada uno. Si quiere obtener 180 € de beneficio, ¿a qué precio debe vender cada libro?

Solución Coste total de los libros:

$45\text{libros} \cdot 12 = 540$ €/libro €.

Ingresos totales deseados (coste + beneficio): $540 + 180 = 720$ €.

Precio de venta por libro: $720 : 45\text{libros} = 16$ €/libro.

Debe vender cada libro a 16 €.

Divisores y múltiplos

14. Escribe los cinco primeros múltiplos de estos números:

- a. 8
- b. 15
- c. 20
- d. 25

Solución

- a. 8, 16, 24, 32, 40.

- b. 15, 30, 45, 60, 75.
- c. 20, 40, 60, 80, 100.
- d. 25, 50, 75, 100, 125.

15. Encuentra todos los divisores de estos números:

- a. 8
- b. 12
- c. 45
- d. 33
- e. 21

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos.

- a. 1, 2, 4, 8.
- b. 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- c. 1, 3, 5, 9, 15, 45.
- d. 1, 3, 11, 33.
- e. 1, 3, 7, 21.

16. Encuentra cinco múltiplos de 8 que cumplan estas dos condiciones:

- Tienen dos cifras.
- Son múltiplos de 3.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

Buscamos múltiplos del mínimo común múltiplo de 8 y 3, que es 24.

Los múltiplos de 24 de dos cifras son: 24, 48, 72, 96.

Necesitamos cinco, pero solo hay cuatro. Si la pregunta se refiere a múltiplos de 8 que también sean múltiplos de 3, estos son los únicos cuatro.

Si hay un error en el enunciado y se piden todos los que existen, la respuesta es 24, 48, 72 y 96.

17. Encuentra tres múltiplos de 11 que cumplan estas dos condiciones:

- Tienen tres cifras.
- Son múltiplos de 4 y 5 a la vez.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

Si son múltiplos de 4 y 5, deben ser múltiplos de su mínimo común múltiplo, que es 20.
 Por tanto, buscamos múltiplos de 11 y 20.
 El mínimo común múltiplo de 11 y 20 es 220.
 Los múltiplos de 220 de tres cifras son: 220, 440, 660, 880.
 Tres de ellos son 220, 440 y 660.

18. Está previsto que asistan 60 personas a una fiesta. ¿De cuántos comensales pueden ser las mesas si todas han de ser iguales y estar completas?

Solución El número de comensales por mesa debe ser un divisor de 60.
 Los divisores de 60 son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
 Las mesas pueden ser de cualquiera de estas cantidades de comensales.

19. Una lechería produce 255 botellas de leche cada semana. Tiene cajas con capacidad para 10 botellas.

- a. ¿Podrá empaquetar toda la producción sin que sobre ninguna botella?
 b. ¿Qué capacidad deberían tener las cajas para poder empaquetar todas las botellas sin que sobre ninguna?

Solución

- a. No, porque 255 no es divisible por 10 (no termina en 0).

Al dividir 255 entre 10, el cociente es 25 y el resto es 5.

Sobrarían 5 botellas.

- b. La capacidad de las cajas debe ser un divisor de 255.

Los divisores de 255 son 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255.

Cualquier capacidad de esta lista serviría.

Por ejemplo, podrían usar cajas de 5 botellas.

Se discute cada caso para ver qué posibilidades son factibles:

Botellas en cada caja	Número de cajas	Discusión
1	255	Este caso quiere decir que se empaquetan de una en una. Esto no tiene sentido si se interpreta que la razón del empaquetado es transportar mejor las botellas.
3	$255 : 3 = 85$	Es una posibilidad, si bien, teniendo en cuenta que querían que fuesen de 10 en 10, parecen pocas botellas para una caja.
5	$255 : 5 = 51$	Es una posibilidad.
15	$255 : 15 = 17$	Es una posibilidad.

Botellas en cada caja	Número de cajas	Discusión
17	$255:15=17$	Es una posibilidad.
51	$255:51=5$	Parecen cajas muy grandes, difíciles de transportar para una persona, y se encuentran muy lejos de las cajas de 10 botellas previstas.
85	$255:85=3$	Parecen cajas muy grandes, difíciles de transportar para una persona, y están muy lejos de las cajas de 10 botellas previstas.
255	1	Esto es absurdo. Poner todas las botellas en una caja de este tamaño es equivalente a meterlas de una en una en un camión.

Se puede discutir en clase cuál es la opción óptima y argumentar la respuesta.

Los números primos

20. ¿Cuáles son los diez primeros números primos? ¿Por qué son primos?

Solución

Los diez primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Son primos porque cada uno de ellos solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

21. Razona si la siguiente afirmación es cierta o no: «La multiplicación de dos números primos es un número primo».

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

La afirmación es falsa. Al multiplicar dos números primos, por ejemplo p_1 y p_2 , el resultado ($p_1 \cdot p_2$) tendrá como divisores al menos 1, p_1 , p_2 y $p_1 \cdot p_2$.

Como tiene más de dos divisores, no es un número primo, sino un número compuesto. Por ejemplo, $2 \cdot 3 = 6$. Los

divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6.

22. Dados los siguientes números, indica cuáles son primos y cuáles compuestos. Escribe los números compuestos en forma de producto.

81, 10, 25, 99, 9, 39, 61, 69, 83, 21, 47, 53, 67, 71, 97, 6

Solución

La evaluación se debe hacer con el mismo método utilizado en la criba de Eratóstenes.

En rojo están los primos: 81, 10, 25, 99, 9, 39, 61, 69, 83, 21, 47, 53, 67, 71, 97, 6.

Descomposición en factores primos

23. Descompón en factores primos de los siguientes números:

- a. 24
- b. 30
- c. 36
- d. 50
- e. 72

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos.

- a. $24 = 2^3 \cdot 3$
- b. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- c. $36 = 2^2 \cdot 3^2$
- d. $50 = 2 \cdot 5^2$
- e. $72 = 2^3 \cdot 3^2$

24. Construye un número que contenga en su descomposición en factores primos:

- a. Al menos un 2 y un 5.
- b. Más de un 7 y un solo 3.
- c. El 11 y el 13.
- d. El 10.
- e. Los factores primos de 21.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos.

- a. Por ejemplo, $2 \cdot 5 = 10$.
- b. Por ejemplo, $7^2 \cdot 3 = 49 \cdot 3 = 147$.
- c. $11 \cdot 13 = 143$.
- d. El 10 no es un factor primo. Sus factores primos son 2 y 5. Un número podría ser $2 \cdot 5 = 10$.
- e. Los factores primos de 21 son 3 y 7. Un número podría ser $3 \cdot 7 = 21$.

25. Si un número contiene en su descomposición factorial el 2, el 3 y el 13, ¿son ciertas las siguientes afirmaciones? Razona la respuesta.

- a. Es múltiplo de 6.
- b. Es múltiplo de 8.
- c. Es múltiplo de 11.
- d. Es múltiplo de 156.

Solución El número es de la forma $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 13^c \cdot \dots$ con $a, b, c \geq 1$.

- a. **Cierta.** Como contiene los factores 2 y 3, es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.
- b. **No necesariamente.** Para ser múltiplo de 8 (2^3), necesitaría tener al menos el factor 2^3 en su descomposición. Solo sabemos que tiene al menos un 2.
- c. **No necesariamente.** No se menciona que el 11 sea uno de sus factores primos.
- d. **Cierta.** La descomposición de 156 es $2^2 \cdot 3 \cdot 13$.

Si el número original tuviera al menos 2^2 , 3 y 13, sería múltiplo de 156. El enunciado solo garantiza un 2, un 3 y un 13.

Por tanto, el número es múltiplo de $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$.

Para ser múltiplo de 156, necesitaríamos que el exponente del 2 fuera al menos 2.

La afirmación no es necesariamente cierta con la información dada.

Sin embargo, si se interpreta que el número es exactamente $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$, no sería múltiplo de 156.

Si se interpreta que "contiene" significa que esos son algunos de sus factores, la respuesta es "no necesariamente".

Criterios de divisibilidad

26. Utilizando los criterios de divisibilidad, determina si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5, 7, 9 y 11. Haz una tabla para recoger los resultados. 74, 981, 105, 620, 792, 912

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Todos para uno y uno para todos

Número	Divisible entre 2	Divisible entre 3	Divisible entre 5	Divisible entre 7	Divisible entre 9	Divisible entre 11
74	Sí, pues acaba en 4, que es par.	No, pues la suma de sus cifras es $7+4=11$, que no es múltiplo de 3.	No, porque acaba en 4, que es distinto de 0 o 5.	No, porque $7-2 \cdot 4=-1$ no es múltiplo de 7.	No, pues la suma de sus cifras es $7+4=11$, que no es múltiplo de 9.	No, porque la diferencia entre la suma de las posiciones impares (4) y la suma de las impares (7) es -3 , que no es múltiplo de 11.
981	No, pues acaba en 1, que es impar.	Sí, pues la suma de sus cifras es $9+8+1=18$, que es múltiplo de 3.	No, porque acaba en 1, que es distinto de 0 o 5.	No, porque $98-2 \cdot 1=96$ no es múltiplo de 7.	Sí, pues la suma de sus cifras es $9+8+1=18$, que es múltiplo de 9.	No, porque la diferencia entre la suma de las posiciones impares ($9+1=10$) y la suma de las impares (8) es 2, que no es múltiplo de 11.

Número	Divisible entre 2	Divisible entre 3	Divisible entre 5	Divisible entre 7	Divisible entre 9	Divisible entre 11
105	No, ya que acaba en 5, que es impar.	Sí, pues la suma de sus cifras es $1+0+5=6$, que es múltiplo de 3.	Sí, porque acaba en 5.	Sí, porque $10-2 \cdot 5=0$ sí es divisible entre 7.	No, pues la suma de sus cifras es $1+0+5=6$, que no es múltiplo de 9.	No, porque la diferencia entre la suma de las posiciones impares ($1+5=6$) y la suma de las impares (0) es 6, que no es múltiplo de 11.
620	Sí, pues acaba en 0.	No, porque $6+2+0=8$ que no es múltiplo de 3.	Sí, porque acaba en 0.	No, porque $62-2 \cdot 0=62$, que no es múltiplo de 7.	No, porque $6+2+0=8$ que no es múltiplo de 9.	No, porque la diferencia entre la suma de las posiciones impares ($6+0=6$) y la suma de las impares (2) es 4, que no es múltiplo de 11.
792	Sí, pues acaba en 2, que es par.	Sí, ya que la suma de sus cifras es $7+9+2=18$, que es múltiplo de 3.	No, porque acaba en 2, que es distinto de 0 o 5.	No, porque $79-2 \cdot 2=74$ no es múltiplo de 7.	Sí, pues la suma de sus cifras es $7+9+2=18$, que es múltiplo de 9.	Sí, porque la diferencia entre la suma de las posiciones impares ($7+2=9$) y la suma de las impares (9) es 0.

Número	Divisible entre 2	Divisible entre 3	Divisible entre 5	Divisible entre 7	Divisible entre 9	Divisible entre 11
912	Sí, pues acaba en 2, que es par.	Sí, pues la suma de sus cifras es $9 + 1 + 2 = 12$, que es múltiplo de 3.	No, porque acaba en 2, que es distinto de 0 o 5.	No, porque $91 - 2 \cdot 2 = 87$ no es múltiplo de 7.	No, pues la suma de sus cifras es $9 + 1 + 2 = 12$, que no es múltiplo de 9.	No, porque la diferencia entre la suma de las posiciones impares ($9 + 2 = 11$) y la suma de las pares (1) es 10, que no es múltiplo de 11.

27. Busca, en cada caso, los valores posibles de k para que el número resultante sea, a la vez, múltiplo de 2 y 3:

- a. $3k$
- b. $10k$
- c. $25k$
- d. $49k$

Solución Para ser múltiplo de 2 y 3, debe ser múltiplo de 6.

- a. $3k$: Para ser divisible por 2, k debe ser par.

Para ser divisible por 3, ya lo es. Así que k puede ser 2, 4, 6, 8. (Si k es un dígito).

- b. $10k$: El número es $100 + k$.

Para ser divisible por 2, k debe ser par.

Para ser divisible por 3, $1 + 0 + k$ debe ser múltiplo de 3. k par y $1 + k$ múltiplo de 3.

Si $k = 2$, $1 + 2 = 3$ (Sí). Si $k = 8$, $1 + 8 = 9$ (Sí). Valores de k : 2, 8.

- c. $25k$: El número es $250 + k$. Para ser divisible por 2, k debe ser par.

Para ser divisible por 3, $2 + 5 + k = 7 + k$ debe ser múltiplo de 3. Si $k = 2$, $7 + 2 = 9$ (Sí). Si $k = 8$, $7 + 8 = 15$ (Sí).

Valores de k : 2, 8.

- d. $49k$: El número es $490 + k$. Para ser divisible por 2, k debe ser par. Para ser divisible por 3, $4 + 9 + k = 13 + k$ debe ser múltiplo de 3. Si $k = 2$, $13 + 2 = 15$ (Sí). Si $k = 8$, $13 + 8 = 21$ (Sí).
Valores de k : 2, 8.

28. Utiliza los criterios de divisibilidad para calcular los divisores de estos números:

- a. 105
- b. 131
- c. 715

Solución

- a. 105: Divisible por 3 ($1 + 0 + 5 = 6$) y por 5 (termina en 5). $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Divisores: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.
- b. 131: No es divisible por 2, 3, 5. Probando con primos: 131 es un número primo. Divisores: 1, 131.
- c. 715: Divisible por 5 (termina en 5) y por 11 ($7 + 5 - 1 = 11$). $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Divisores: 1, 5, 11, 13, 55, 65, 143, 715.

29. El criterio de divisibilidad del 8 dice que si las tres últimas cifras de un número son múltiplo de 8, el número es divisible por 8. Construye un número de seis cifras que sea divisible por 8.

Solución

Se busca un número que sea múltiplo de 8 y tenga tres cifras. Acto seguido, se coloca al final de cualquier número. Por ejemplo: 854752, 364184, 741592... También es divisible entre 8 si termina en tres 000, por ejemplo, 675000, 572000, 347000...

30. Utilizando los criterios de divisibilidad, construye números que sean:

- a. Divisibles por 6.
- b. Divisibles por 35.
- c. Divisibles por 40.
- d. Divisibles por 45.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

- a. Divisible por 2 y 3. Por ejemplo, 132 (par y $1 + 3 + 2 = 6$).
- b. Divisible por 5 y 7. Debe terminar en 0 o 5. Por ejemplo, 70.
- c. Divisible por 8 y 5. Debe terminar en 0 y sus tres últimas cifras ser múltiplo de 8. Por ejemplo, 1120.
- d. Divisible por 5 y 9. Debe terminar en 0 o 5 y la suma de sus cifras ser múltiplo de 9. Por ejemplo, 135 ($1 + 3 + 5 = 9$).

El mínimo común múltiplo

31. Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

- a. 45 y 81
- b. 64 y 28
- c. 42 y 77
- d. 24 y 25

Solución

- a. $45 = 3^2 \cdot 5$; $81 = 3^4$. $\text{mcm}(45, 81) = 3^4 \cdot 5 = 405$.
- b. $64 = 2^6$; $28 = 2^2 \cdot 7$. $\text{mcm}(64, 28) = 2^6 \cdot 7 = 448$.
- c. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $77 = 7 \cdot 11$. $\text{mcm}(42, 77) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$.
- d. $24 = 2^3 \cdot 3$; $25 = 5^2$. Son primos entre sí. $\text{mcm}(24, 25) = 24 \cdot 25 = 600$.

32. Calcula:

- a. $\text{mcm}(360, 180)$
- b. $\text{mcm}(105, 45)$
- c. $\text{mcm}(144, 120)$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Tú la llevas.

- a. Como 360 es múltiplo de 180, el mcm es 360.
- b. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; $45 = 3^2 \cdot 5$. $\text{mcm}(105, 45) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$.
- c. $144 = 2^4 \cdot 3^2$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. $\text{mcm}(144, 120) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720$.

33. Calcula el mínimo común múltiplo de las siguientes ternas de números:

- a. 35, 25 y 15
- b. 64, 12 y 22
- c. 11, 22 y 33

Solución

- a. $35 = 5 \cdot 7$; $25 = 5^2$; $15 = 3 \cdot 5$.
 $\text{mcm}(35, 25, 15) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$.
- b. $64 = 2^6$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $22 = 2 \cdot 11$.
 $\text{mcm}(64, 12, 22) = 2^6 \cdot 3 \cdot 11 = 64 \cdot 33 = 2112$.

c. $11=11$; $22=2 \cdot 11$; $33=3 \cdot 11$.
 $\text{mcm}(11, 22, 33) = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$.

34. Construye dos números cuyo mínimo común múltiplo sea 672. Explica tu razonamiento.

Solución

Primero, descomponemos 672 en factores primos: $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$.

Para construir dos números, a y b , cuyo mcm sea 672, debemos distribuir los factores primos ($2^5, 3, 7$) entre a y b .

La única condición es que para cada factor primo, la mayor potencia debe estar presente en al menos uno de los números.

Por ejemplo: $a = 2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 96$ $b = 7 = 7$

$\text{mcm}(96, 7) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

Otro ejemplo: $a = 2^5 = 32$ $b = 3 \cdot 7 = 21$

$\text{mcm}(32, 21) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

35. Construye dos números cuyo mínimo común múltiplo sea un número par, no divisible por 4 ni por 3.

Solución

Un número con estas características debe tener el factor 2 (para ser par), pero no 2^2 (para no ser divisible por 4) y no el factor 3.

El mcm más simple sería $2 \cdot 5 = 10$.

Podemos elegir los números 2 y 5. Su mcm es 10, que es par, no divisible por 4 y no divisible por 3.

Otro par podría ser 10 y 5. Su mcm es 10.

36. Silvia y Pablo salen juntos a dar un paseo en bicicleta. Silvia tarda 21 minutos en rodear el pueblo, mientras que Pablo necesita 28 minutos.

a. ¿Cuánto tiempo tardarán en coincidir en el punto de partida?

b. ¿Cuántas vueltas al pueblo habrá dado cada uno?

Solución

a. El tiempo que tardarán en coincidir es el mcm de 21 y 28. $21 = 3 \cdot 7$; $28 = 2^2 \cdot 7$. $\text{mcm}(21, 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Tardarán 84 minutos en coincidir.

b. Silvia: $84\text{min} / 21\text{min} / \text{vuelta} = 4$ vueltas.

Pablo: $84\text{min} / 28\text{min} / \text{vuelta} = 3$ vueltas.

37. Raúl y Rafa fabrican chapas para una ONG. Cada uno produce la misma cantidad de chapas a la semana. Raúl las coloca en cajas de 50 unidades, y Rafa, en cajas de 12, sin que a ninguno le sobren chapas ni le queden cajas incompletas. ¿Cuántas chapas fabrica como mínimo cada uno a la semana?

Solución

La cantidad de chapas debe ser un múltiplo de 50 y de 12.

Buscamos el mínimo común múltiplo.

$$50 = 2 \cdot 5^2; 12 = 2^2 \cdot 3.$$

$$\text{mcm}(50, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 3 \cdot 25 = 300.$$

Como mínimo, cada uno fabrica 300 chapas a la semana.

38. En una estación sale un tren hacia el norte cada 20 minutos, otro hacia el sur cada 30 minutos y otro hacia el oeste cada 50 minutos. Los trenes funcionan ininterrumpidamente durante las 24 horas del día.

- a. ¿Cada cuántas horas salen los tres trenes a la vez?
b. ¿Cuántas veces se produce esta situación en un día?

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

- a. Buscamos el mcm de 20, 30 y 50 minutos. $20 = 2^2 \cdot 5$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $50 = 2 \cdot 5^2$.

$$\text{mcm}(20, 30, 50) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 3 \cdot 25 = 300 \text{ minutos.}$$

Convertimos los minutos a horas: $300 \text{ min} / 60 \text{ min} / \text{h} = 5 \text{ horas}$.

Salen los tres a la vez cada 5 horas.

- b. Un día tiene 24 horas. Si empiezan a la vez a las 00:00, coincidirán a las 00:00, 05:00, 10:00, 15:00, 20:00. Son 5 veces.

Si contamos la del inicio del día siguiente, serían 5 coincidencias en un periodo de 24 horas. $24 \text{ horas} / 5 \text{ horas} = 4.8$.

Esto significa que coinciden 4 veces después de la salida inicial.

En total, 5 veces (incluyendo la de las 00:00).

39. En un restaurante, una empresa A suministra agua cada 6 días, y otra empresa B provee congelados cada 15. Hace 15 días ambas empresas coincidieron en el restaurante. El chef cree que dentro de un mes las dos empresas volverán a encontrarse, pero el maître cree que esta coincidencia ocurrirá dentro de 15 días. ¿Quién está en lo cierto?

Solución

Primero calculamos cada cuánto coinciden.

Es el mcm de 6 y 15. $6 = 2 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$. $\text{mcm}(6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ días.

Las empresas coinciden cada 30 días.

Si la última vez que coincidieron fue hace 15 días, la próxima vez que coincidirán será en $30 - 15 = 15$ días.

El maître está en lo cierto.

El máximo común divisor

40. Calcula el máximo común divisor de los siguientes pares de números:

- a. 81 y 21
- b. 32 y 40
- c. 77 y 35
- d. 45 y 75

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata

- a. $81 = 3^4$; $21 = 3 \cdot 7$. $\text{mcd}(81, 21) = 3$.
- b. $32 = 2^5$; $40 = 2^3 \cdot 5$. $\text{mcd}(32, 40) = 2^3 = 8$.
- c. $77 = 7 \cdot 11$; $35 = 5 \cdot 7$. $\text{mcd}(77, 35) = 7$.
- d. $45 = 3^2 \cdot 5$; $75 = 3 \cdot 5^2$. $\text{mcd}(45, 75) = 3 \cdot 5 = 15$.

41. Calcula:

- a. $\text{mcd}(495, 735)$
- b. $\text{mcd}(343, 224)$
- c. $\text{mcd}(564, 372)$

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata.

- a. Descomponemos los números en factores primos: $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ $735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
El mcd es el producto de los factores comunes con el menor exponente: $\text{mcd}(495, 735) = 3 \cdot 5 = 15$
- b. Descomponemos los números en factores primos: $343 = 7^3$ $224 = 2^5 \cdot 7$
El mcd es el producto de los factores comunes con el menor exponente: $\text{mcd}(343, 224) = 7$
- c. Descomponemos los números en factores primos: $564 = 2^2 \cdot 3 \cdot 47$ $372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$
El mcd es el producto de los factores comunes con el menor exponente: $\text{mcd}(564, 372) = 2^2 \cdot 3 = 12$

42. Calcula el máximo común divisor de las siguientes ternas de números:

- a. 2, 8 y 16
- b. 26, 39 y 65
- c. 45, 36 y 72

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: El corro de la patata.

- a. Descomponemos los números en factores primos: $2 = 2$ $8 = 2^3$ $16 = 2^4$ El mcd es el factor común con el menor exponente: $\text{mcd}(2, 8, 16) = 2$
- b. Descomponemos los números en factores primos: $26 = 2 \cdot 13$ $39 = 3 \cdot 13$ $65 = 5 \cdot 13$ El mcd es el factor común con el menor exponente: $\text{mcd}(26, 39, 65) = 13$
- c. Descomponemos los números en factores primos: $45 = 3^2 \cdot 5$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ El mcd es el factor común con el menor exponente: $\text{mcd}(45, 36, 72) = 3^2 = 9$

43. Construye dos números cuyo máximo común divisor sea 22. Explica tu razonamiento.

Solución

Para construir dos números cuyo máximo común divisor sea 22, debemos multiplicar 22 por dos números que sean primos entre sí (es decir, que no tengan divisores comunes aparte del 1).

Por ejemplo, podemos elegir los números 2 y 3, que son primos entre sí. Número 1: $22 \cdot 2 = 44$

Número 2: $22 \cdot 3 = 66$

El máximo común divisor de 44 y 66 es 22.

Otro ejemplo, usando los números 3 y 5 (primos entre sí):

Número 1: $22 \cdot 3 = 66$

Número 2: $22 \cdot 5 = 110$

El máximo común divisor de 66 y 110 es 22.

44. Construye dos números cuyo máximo común divisor sea un número impar, no divisible por 9 ni por 5.

Solución

Buscamos un mcd que sea impar (no divisible por 2), no divisible por 9 (no puede tener 3^2 como factor) y no divisible por 5.

Un ejemplo de tal número es 7.

Ahora, construimos dos números cuyo mcd sea 7.

Multiplicamos 7 por dos números primos entre sí, por ejemplo, 2 y 3.

Número 1: $7 \cdot 2 = 14$

Número 2: $7 \cdot 3 = 21$

El mcd (14, 21) es 7, que cumple las condiciones: es impar, no es divisible por 9 y no es divisible por 5.

45. En una floristería quieren hacer ramos de flores iguales para una fiesta. Tienen 63 rosas y 81 lilas. Si a la fiesta acuden 10 personas, ¿será posible conseguir 10 ramos de igual composición? Razona tu respuesta y di cuántas rosas y lilas contendrían los ramos que se pueden formar.

Solución

Para saber el número máximo de ramos iguales que se pueden formar, calculamos el máximo común divisor de 63 y 81.

Descomponemos en factores primos:

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$81 = 3^4$$

$$\text{mcd}(63, 81) = 3^2 = 9$$

Se pueden formar como máximo 9 ramos iguales.

Como 9 es el número máximo de ramos que se pueden hacer, no es posible conseguir 10 ramos de igual composición.

Si se formaran los 9 ramos, cada uno contendría:

Rosas por ramo: $63 : 9 = 7$ rosas.

Lilas por ramo: $81 : 9 = 9$ lilas.

46. Alberto quiere embaldosar el suelo de su salón con baldosas cuadradas, de manera que no tenga que cortar ninguna. Las dimensiones del salón son 600 cm x 550 cm.
- a. ¿Cuál es el tamaño más grande que pueden tener las baldosas para que encajen perfectamente?
 - b. ¿Cuántas baldosas de este tamaño necesitará?
 - c. ¿Podría usar baldosas de otros tamaños?

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

- a. El tamaño del lado de la baldosa cuadrada más grande posible debe ser un divisor común de la longitud y la anchura del salón.

Para que sea el más grande, calculamos el máximo común divisor de 600 y 550.

Descomponemos en factores primos:

$$600 = 6 \cdot 100 = 2 \cdot 3 \cdot 10^2 = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$550 = 55 \cdot 10 = 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$$

$$\text{mcd}(600, 550) = 2 \cdot 5^2 = 50$$

El tamaño más grande que pueden tener las baldosas es de 50 cm x 50 cm.

- b. Para calcular el número de baldosas, dividimos el área total del salón por el área de una baldosa, o calculamos cuántas baldosas caben a lo largo y a lo ancho.

A lo largo: $600 \text{ cm} \div 50 \text{ cm} = 12$ baldosas.

A lo ancho: $550 \text{ cm} \div 50 \text{ cm} = 11$ baldosas.

Total de baldosas: $12 \cdot 11 = 132$ baldosas.

- c. Sí, podría usar baldosas de otros tamaños.

El lado de las baldosas podría medir cualquier longitud que sea un divisor común de 600 y 550.

Los divisores comunes son los divisores del mcd (50).

Divisores de 50: 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Podría usar baldosas de 1x1 cm, 2x2 cm, 5x5 cm, 10x10 cm o 25x25 cm.

El número 1

47. Di si las siguientes parejas de números naturales son primos entre sí. Razona tu respuesta:

- a. 715 y 729
- b. 845 y 312
- c. 315 y 176
- d. 145 y 203

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Mesa redonda.

Dos números son primos entre sí si su máximo común divisor es 1.

- a. 715 termina en 5, por lo que es divisible por 5.

$$715 = 5 \cdot 143 = 5 \cdot 11 \cdot 13.$$

Para 729, la suma de sus cifras es $7 + 2 + 9 = 18$, que es múltiplo de 3 y 9. $729 = 3^6$.

No tienen factores primos comunes. Por lo tanto, son primos entre sí.

- b. 845 termina en 5, es divisible por 5. $845 = 5 \cdot 169 = 5 \cdot 13^2$.

312 es par, divisible por 2. La suma de sus cifras es $3 + 1 + 2 = 6$, divisible por 3.

$$312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13.$$

Tienen el 13 como factor común. No son primos entre sí.

- c. 315 termina en 5, divisible por 5. La suma de sus cifras es $3 + 1 + 5 = 9$, divisible por 3 y 9.

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7. \quad 176 \text{ es par, divisible por 2. } 176 = 2^4 \cdot 11.$$

No tienen factores primos comunes. Son primos entre sí.

- d. 145 termina en 5, divisible por 5. $145 = 5 \cdot 29$.

Para 203, probamos divisores primos: no es divisible por 2, 3, 5. Probamos con 7:

$$203 : 7 = 29. \quad 203 = 7 \cdot 29.$$

Tienen el 29 como factor común. No son primos entre sí.

48. Encuentra tres parejas de números primos entre sí en las que ninguno de ellos sea primo.

Solución

Buscamos parejas de números compuestos cuyo mcd sea 1.

- Pareja 1: 4 y 9. $4 = 2^2$ y $9 = 3^2$.
No tienen factores comunes, $\text{mcd}(4, 9) = 1$.
- Pareja 2: 8 y 15. $8 = 2^3$ y $15 = 3 \cdot 5$.
No tienen factores comunes, $\text{mcd}(8, 15) = 1$.
- Pareja 3: 25 y 27. $25 = 5^2$ y $27 = 3^3$.
No tienen factores comunes, $\text{mcd}(25, 27) = 1$.

49. ¿Cómo se transforma un número si se multiplica por 1?

Solución

Si un número se multiplica por 1, el número no se transforma, se queda igual. El 1 es el elemento neutro de la multiplicación. Por ejemplo, $25 \cdot 1 = 25$.

50. Discute la siguiente afirmación: «Todo número es divisible por 1».

Solución

La afirmación es cierta. Cualquier número natural n se puede dividir por 1 de forma exacta, y el resultado es el propio número n .

La división $n \div 1 = n$ siempre tiene resto 0. Por lo tanto, todo número es divisible por 1.

Síntesis

51. **Juegos numéricos.** Encuentra tres números impares mayores que 10 cuyo máximo común divisor sea 1.

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

Buscamos tres números impares, mayores que 10, que no compartan ningún factor primo. Por ejemplo, podemos elegir potencias de primos impares distintos o productos de primos impares distintos.

- Número 1: $15 = 3 \cdot 5$
- Número 2: $35 = 5 \cdot 7$
- Número 3: $77 = 7 \cdot 11$

Estos tres números son impares y mayores que 10. $\text{mcd}(15, 35, 77): 15 = 3 \cdot 5, 35 = 5 \cdot 7, 77 = 7 \cdot 11$

No hay ningún factor primo que sea común a los tres números a la vez.

Por lo tanto, su máximo común divisor es 1.

52. **Historia y sociedad.** En un jeroglífico egipcio se cuenta que, en dos templos del dios Anubis, había el mismo número de escarabajos joya. En uno de esos templos los guardaban en cofres de 8 en 8, y en el otro, en vasijas que contenían 36 unidades cada una.

- a. ¿Cuántos escarabajos joya, como mínimo, podía haber en cada templo?
- b. ¿Cuántos cofres y vasijas se utilizarían?

Solución

- a. El número total de escarabajos debe ser un múltiplo de 8 y también de 36. Para encontrar la cantidad mínima, calculamos el mínimo común múltiplo de 8 y 36. Descomponemos en factores primos: $8 = 2^3$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\text{mcm}(8, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$. Como mínimo, podía haber 72 escarabajos joya en cada templo.
- b. Para esa cantidad mínima de 72 escarabajos: Número de cofres (de 8 unidades): $72 \div 8 = 9$ cofres. Número de vasijas (de 36 unidades): $72 / 36 = 2$ vasijas. Se utilizarían 9 cofres y 2 vasijas.

53. **Cultura matemática.** La conjetura de Goldbach dice que todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos. Busca los primos cuya suma da los siguientes números pares:

- a. 4
b. 6
c. 10
d. 20
e. 100

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

4: En este caso, como el 1 no es un número primo, la única posibilidad que queda es:

$$2 + 2 = 4$$

6: En este caso, si uno de los primos es 2, el otro número debería ser 4, que no es primo. Por tanto la única posibilidad es:

$$3 + 3 = 6$$

10: En este caso, si uno de los primos es 2, el otro número debería ser 8, que no es primo. Si es 3, el otro número es 7, que sí es primo. Y si es 5, el otro número es 5, que sí es primo. Por tanto, hay dos posibilidades:

$$3 + 7 = 5 + 5 = 10$$

20: En este caso, se puede hacer una tabla para ver las posibles soluciones con más facilidad:

Primos	2	3	5	7	11	13	17	19
Diferencia hasta 20	18	17	15	13	9	7	3	1

En azul aparece una de las soluciones, y en verde, la otra. En el resto de sumas aparecen números que no son primos. Por tanto, las dos posibilidades serán:

$$3 + 17 = 7 + 13 = 20$$

30: Viendo los casos anteriores, el 2 nunca va a formar parte de esas sumas, excepto en el caso del 4, ya que cualquier número par al que se le reste 2 va a dar otro número par, luego

nunca será primo. Así pues, el 2 no lo tendremos en cuenta. Mediante una tabla se pueden observar las soluciones posibles:

Primos	3	5	7	11	13	17	19	23	29
Diferencia hasta 30	27	25	23	19	17	13	11	7	1

Se encuentran tres sumas válidas:

$$7 + 23 = 11 + 19 = 17 + 13 = 30$$

100: En este caso, procederemos de la misma manera, usando los números primos calculados con la criba de Eratóstenes. Como las parejas se repiten, solo hay que calcular hasta el primo 47.

Primos	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
Diferencia hasta 100	97	95	93	89	87	83	81	77	71	69	63	59	57	53

Hay 6 sumas válidas:

$$3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53 = 100$$

54. **Ambiente escolar.** En una escuela quieren repartir paquetes iguales que contengan lápices, bolígrafos y gomas de borrar. El colegio tiene 120 lápices, 168 bolígrafos y 72 gomas de borrar. ¿Cuántos paquetes iguales se podrán hacer como máximo? ¿Cuántos lápices y gomas tendrá cada paquete?

Solución

El número máximo de paquetes iguales que se pueden hacer es el máximo común divisor del número de lápices, bolígrafos y gomas de borrar.

Calculamos el mcd (120, 168, 72). Descomponemos en factores primos:

$$120 = 12 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$168 = 2 \cdot 84 = 2^2 \cdot 42 = 2^3 \cdot 21 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\text{mcd}(120, 168, 72) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$$

Se podrán hacer como máximo 24 paquetes iguales.

Contenido de cada paquete:

Lápices: $120 \div 24 = 5$ lápices.

Bolígrafos: $168 \div 24 = 7$ bolígrafos.

Gomas de borrar: $72 \div 24 = 3$ gomas de borrar.

Cada paquete tendrá 5 lápices, 7 bolígrafos y 3 gomas de borrar.

55. **Propiedades de los números.** Dos números primos son gemelos cuando su resta es 2. Por ejemplo, 3 y 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Busca entre los cien primeros números naturales las parejas de números primos gemelos.
- Ordena estas parejas de menor a mayor.
- Suma los números de cada pareja y comprueba el resultado con la calculadora.
- Calcula la mitad de las sumas obtenidas en el apartado anterior.
- Realiza con la calculadora los productos de cada pareja de números primos gemelos.
- Suma 1 a los productos obtenidos en el apartado anterior.
- ¿Qué relación hay entre los resultados obtenidos en d y en f?

Solución

Estructura de trabajo cooperativo propuesta: Folio giratorio.

- Las parejas de primos gemelos menores de 100 son: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73).
- Las parejas ya están ordenadas de menor a mayor.

- c. Suma de cada pareja: $3 + 5 = 8$; $5 + 7 = 12$; $11 + 13 = 24$; $17 + 19 = 36$; $29 + 31 = 60$;
 $41 + 43 = 84$; $59 + 61 = 120$; $71 + 73 = 144$
- d. Mitad de cada suma: $8 : 2 = 4$; $12 : 2 = 6$; $24 : 2 = 12$; $36 : 2 = 18$; $60 : 2 = 30$; $84 : 2 = 42$;
 $120 : 2 = 60$; $144 : 2 = 72$ (Estos números son los números que están entre cada par de primos gemelos).
- e. Producto de cada pareja: $3 \cdot 5 = 15$; $5 \cdot 7 = 35$; $11 \cdot 13 = 143$; $17 \cdot 19 = 323$; $29 \cdot 31 = 899$;
 $41 \cdot 43 = 1763$; $59 \cdot 61 = 3599$; $71 \cdot 73 = 5183$
- f. Sumar 1 a cada producto: $15 + 1 = 16$; $35 + 1 = 36$; $143 + 1 = 144$; $323 + 1 = 324$; $899 + 1 = 900$;
 $1763 + 1 = 1764$; $3599 + 1 = 3600$; $5183 + 1 = 5184$
- g. Los resultados obtenidos en el apartado f) son el cuadrado de los resultados obtenidos en el apartado d). $4^2 = 16$; $6^2 = 36$; $12^2 = 144$; $18^2 = 324$; $30^2 = 900$; $42^2 = 1764$; $60^2 = 3600$;
 $72^2 = 5184$

La relación es que el producto de dos primos gemelos más 1 es igual al cuadrado del número natural que hay entre ellos.

Comprende y resuelve

Lanza los dados

1. Observa los dados de la figura. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y escribe en cada casilla el número de puntos de la cara inferior de cada dado.

Solución:

a. Visible 6	Oculto 1	b. Visible 2	Oculto 5	c. Visible 3	Oculto 4
d. Visible 5	Oculto 2	e. Visible 1	Oculto 6	f. Visible 2	Oculto 5

2. Imagina que lanzamos dos dados, uno rojo y otro azul, ambos de seis caras con puntos del 1 al 6. El rojo nos indica las decenas, y el azul, las unidades.

- a. ¿Cuál es el mayor número que podríamos formar con los dados rojo y azul?
- b. Si en el dado rojo sale un 5, ¿qué deberá salir en el dado azul para obtener un múltiplo de 3?
- c. A continuación, lanzamos un dado verde similar a los anteriores. Si los dados rojo y azul forman el número 45, ¿qué valores del dado verde pueden salir que sean divisores de este número?

Solución:

La mayor cifra que puede salir es el 6, puesto que son dados de seis caras.

- c. 66
- d. La suma de 5 y de lo que salga en el otro dado ha de dar un múltiplo de 3. De entre las seis posibilidades, las que son múltiplo de 3 son 54 y 51.
- e. Los divisores de 45 son 1, 3, 5, 9, 15, 45. De entre todos ellos, solo serán válidos aquellos que sean menores o iguales a 6, ya que el dado solo tiene seis caras. Por tanto, el dado verde podrá dar como divisores de 45: 1, 3 y 5.
3. Lanzamos los tres dados anteriores. ¿Qué números deberán salir para que el máximo común divisor de los tres valores sea mayor que 1?

Solución:

Para que el máximo común divisor sea mayor que 1, los resultados de los tres dados deberán tener algún factor común en su descomposición en factores primos.

Como el 5 es primo y como los números de las caras de los lados son menores que 6, si sale el cinco en algún resultado, el mcd será 1.

La única posibilidad es que salga 5 en los tres dados, en cuyo caso el mcd será 5. Si aparece el 1, el único factor común será 1, luego no existe ninguna combinación con mcd mayor que 1 que contenga al 1.

El 4 contiene al 2 ($4 = 2^2$), y el 6 contiene al 3 y al 2 ($6 = 2 \cdot 3$).

Por tanto, las posibles combinaciones con mcd mayor que 1 serán:

4. Haz una tabla en la que clasifiques los resultados según su máximo común divisor.

mcd=2	mcd=3	mcd=4	mcd=5	mcd=6
2, 2, 2	3, 3, 3	4, 4, 4	5, 5, 5	6, 6, 6
2, 2, 4	3, 3, 6			
2, 4, 4	3, 6, 6			
2, 2, 6				
2, 6, 6				
4, 4, 6				
4, 6, 6				

Atrévete

La elección del envase

Propuesta de solución:

1. Tu objetivo es encontrar las capacidades ideales de las tres cajas para cubrir todas las posibles cantidades de venta.
2. ¿Qué tamaños elegirías para cada caja? Explica por qué crees que son la mejor elección. Para poder entregar cualquier número de aguacates, una de las cajas debe tener una capacidad de 1. De esta manera, nos aseguramos de poder completar cualquier cantidad. Por ejemplo, si un cliente pide 7 aguacates y tenemos cajas de 3 y 5, no podemos dárselo. Pero si tenemos una caja de 1, podemos combinarla con las otras para formar cualquier número.

Una vez que tenemos la caja de 1, las otras dos cajas pueden tener distintas capacidades. Una buena elección sería seguir una progresión que permita optimizar el número de cajas a usar. Por ejemplo, podríamos usar potencias de un número base. Si elegimos el 2, las cajas serían de 1, 2 y 4 aguacates. Con estas cajas podemos formar cualquier número hasta 7 ($1+2+4$) usando como máximo una caja de cada tipo. Para números más grandes, necesitaríamos más cajas del mismo tipo.

Otra opción, pensando en que los clientes suelen llevarse más de diez, podría ser usar cajas de 1, 5 y 10 aguacates. Esto se asemeja a nuestro sistema monetario y es muy intuitivo.

- **Caja 1:** 1 aguacate. Esencial para poder formar cualquier cantidad exacta.
- **Caja 2:** 5 aguacates. Un tamaño intermedio común.
- **Caja 3:** 10 aguacates. Para los clientes que compran en grandes cantidades.

Con esta combinación (1, 5, 10), podemos formar cualquier cantidad de aguacates de manera eficiente. Por ejemplo, para 17 aguacates, usaríamos una caja de 10, una de 5 y dos de 1. Para 23 aguacates, dos de 10 y tres de 1. Esta elección es práctica, fácil de entender y cubre todas las posibilidades.